Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2026

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 3

1. **(6 ptos)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{X}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución. El polinomio característico asociado a A es

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3),$$

y los valores propios son $\lambda_1 = 2$ (multiplicidad 2) y $\lambda_2 = 3$ (multiplicidad 1).

- Para $\lambda_2 = 3$, obtenemos el vector propio

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda_1 = 2$, el espacio propio $\ker(A - 2I)$ es de dimensión 1, con vector propio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos un vector propio generalizado v_1^* tal que $(A - 2I)v_1^* = v_1$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, obtenemos $v_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces, la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{X}(t) = c_1\, \mathrm{e}^{2t} v_1 + c_2\, \mathrm{e}^{2t}(v_1^* + t\, v_1) + c_3\, \mathrm{e}^{3t} v_2, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

o sea

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases} \implies c_3 = 1,\ c_2 = -1,\ c_1 = 0.$$

La solución del problema de valor inicial es

$$\mathbf{X}(t) = -\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\, \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Distribución de puntaje.

- Asignar **(1 pt)** por calcular correctamente el polinomio característico y determinar los valores propios $\lambda_1 = 2$ (multiplicidad 2) y $\lambda_2 = 3$ (multiplicidad 1). Descontar **(0.5 pt)** si se comente a lo más un error.
- Asignar **(1.5 pt)** por determinar correctamente los vectores propios v_1 y v_2, **(0.75 pt** por cada vector propio).
- Asignar **(1 pt)** por encontrar correctamente un vector propio generalizado v_1^* tal que $(A - 2I)v_1^* = v_1$.
- Asignar **(1 pt)** por expresar correctamente la solución general del sistema.
- Asignar **(1 pt)** por aplicar la condición inicial y obtener $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar correctamente la solución del problema de valor inicial.

  Observación. En el caso que un estudiante se equivoca determinando los valores o vectores propios pero aplica correctamente la metodología, se asigna un total de **(3 pts)**.

2. **(6 pts)** Considere el sistema de ecuaciones diferenciales para $t > 0$

$$(S_1) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{t}x + \frac{2}{t}y + t \\ y' = \frac{2}{t}x + \frac{1}{t}y + t. \end{cases}$$

(a) Considere la sustitución $s = \ln t$ para $t > 0$ y demuestre que el sistema (S_1) se transforma en el siguiente nuevo sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes

$$(S_2) \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x + 2y + \mathrm{e}^{2s} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 2x + y + \mathrm{e}^{2s}. \end{cases}$$

(b) Resuelva el nuevo sistema (S_2).

(c) Determine la solución general del sistema inicial (S_1).

Solución.

(a) Sea $s = \ln t$ para $t > 0$. Entonces $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}$ y luego

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Por lo tanto, multiplicando cada ecuación de (S_1) por $t = \mathrm{e}^s$ obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y + \mathrm{e}^{2s}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y + \mathrm{e}^{2s}.$$

y así el nuevo sistema (S_2) está dado por

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x + 2y + \mathrm{e}^{2s} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 2x + y + \mathrm{e}^{2s}, \end{cases}$$

que es lineal no homogéneo con coeficientes constantes que podemos escribir de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}s} = A\mathbf{X} + G(s),$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G(s) = \mathrm{e}^{2s}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Resolvemos el sistema homogéneo asociado a (S_2). El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

con valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.

- Para $\lambda_1 = 3$, se obtiene el vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Para $\lambda_2 = -1$, se obtiene el vector propio $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La solución general del sistema homogéneo asociado a (S_2) es

$$\mathbf{X}_h(s) = c_1 \mathrm{e}^{3s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-s} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$\mathbf{X}_h(s) = \Phi(s)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

y donde $\Phi(s)$ es una matriz fundamental dada por

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3s} & \mathrm{e}^{-s} \\ \mathrm{e}^{3s} & -\mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix}.$$

Determinamos una solución particular para el sistema no homogéneo (S_2). Podemos usar ambos métodos de variación de parámetros de coeficientes indeterminados.

- **Método 1.** Por variación de parámetros, determinamos una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p(s) &= \Phi(s) \int \Phi^{-1}(s) G(s) \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3s} & \mathrm{e}^{-s} \\ \mathrm{e}^{3s} & -\mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{s} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2s} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Método 2.** Notando que $\mu = 2$ no es valor propio de la matriz A, buscaremos una solución de la forma $X_p(s) = \mathrm{e}^{2s} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y sustituyendo en el sistema, obtenemos

$$\mathbf{X}_p(s) = \mathrm{e}^{2s} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema (S_2) es

$$\mathbf{X}(s) = c_1 \mathrm{e}^{3s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-s} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{2s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Volvemos al sistema inicial (S_1) sustituyendo $\mathrm{e}^s = t$ para obtener

$$\begin{cases} x(t) = c_1 t^3 + \frac{c_2}{t} - t^2 \\ y(t) = c_1 t^3 - \frac{c_2}{t} - t^2, \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

(a) Asignar **(1 pt)** por realizar correctamente el cambio de variable $s = \ln t$ y justificar que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, obteniendo el sistema (S_2).

(b)
- Asignar **(1 pt)** por calcular correctamente el polinomio característico de A y determinar los valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.
- Asignar **(1 pt)** por calcular correctamente los vectores propios.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar correctamente la solución general del sistema homogéneo asociado a (S_2).
  Descontar **(0.5 pt)** si se comente a lo más un error.
- Asignar **(1 pt)** por determinar una solución particular del sistema no homogéneo (S_2) usando variación de parámetros o coeficientes indeterminados.
- Asignar (**0.5 pt**) por expresar correctamente la solución general del sistema (S_2).

(c) Asignar **(1 pt)** por revertir el cambio de variable $\mathrm{e}^s = t$ y expresar correctamente la solución general del sistema inicial (S_1).

3. **(6 ptos)** Tres estanques T_1, T_2 y T_3 están conectados en cascada. Los volúmenes son $V_1 = 6\,\mathrm{L}$, $V_2 = 3\,\mathrm{L}$ y $V_3 = 2\,\mathrm{L}$. Agua limpia entra a T_1 a razón $r = 6\,\mathrm{L/min}$, la mezcla de T_1 fluye a T_2, la de T_2 a T_3, y la de T_3 sale al exterior a la misma razón. La mezcla en cada estanque es instantáneamente homogénea y los volúmenes permanecen constantes.
Sean $x_i(t)$ (en gramos) la cantidad de sal en T_i al tiempo $t \geq 0$ (en minutos) para $i \in \{1, 2, 3\}$. Las cantidades iniciales son $x_1(0) = 18\,\mathrm{g}$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$.

   (a) Demuestre que el sistema diferencial que modela el problema es
   $$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
   (b) Determine la solución general del sistema y exprese las cantidades de sal en cada estanque.
   (c) ¿Después de cuánto tiempo las **concentraciones** en los estanques T_2 y T_3 son iguales?
   (d) Calcule $\lim_{t\to+\infty} x_i(t)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ e interprete físicamente el resultado.

Solución.

(a) Las tasas de renovación están dadas por $k_i = \frac{r}{V_i}$ tales que
$$k_1 = \frac{6}{6} = 1, \; k_2 = \frac{6}{3} = 2, \; k_3 = \frac{6}{2} = 3.$$
- T_1: solo sale sal (agua limpia entra) entonces $x_1' = -k_1 x_1 = -x_1$,
- T_2: entra desde T_1 a tasa $k_1 x_1 = x_1$; sale a tasa $k_2 x_2 = 2x_2$. Entonces $x_2' = x_1 - 2x_2$.
- T_3: entra desde T_2 a tasa $k_2 x_2 = 2x_2$; sale a tasa $k_3 x_3 = 3x_3$. Entonces $x_3' = 2x_2 - 3x_3$.

Por lo tanto, se obtiene el sistema
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \\ x_3' = 2x_2 - 3x_3, \end{cases}$$
o sea $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ con la matriz triangular inferior
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y donde} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Los valores propios de la matriz A son
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3,$$

y los vectores propios asociados son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

respectivamente. Por lo tanto, la solución general está dada por

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t}\mathbf{v}_1 + c_2\mathrm{e}^{-2t}\mathbf{v}_2 + c_3\mathrm{e}^{-3t}\mathbf{v}_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Determinamos las constantes, usando la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}18\\0\\0\end{pmatrix}$ y luego

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\0\\0\end{pmatrix} \implies \begin{cases}c_1 = 18\\ c_2 = -18\\ c_3 = 18.\end{cases}$$

Luego, las cantidades de sal x_i al instante t en cada estanque T_i para $i \in \{1,2,3\}$ están dadas por

$$\begin{cases} x_1 &= 18\mathrm{e}^{-t},\\ x_2 &= 18\mathrm{e}^{-t} - 18\mathrm{e}^{-2t} = 18\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t}),\\ x_3 &= 18\mathrm{e}^{-t} - 36\mathrm{e}^{-2t} + 18\mathrm{e}^{-3t} = 18\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^2. \end{cases}$$

(c) La concentración de sal en el estanque T_i es

$$C_i(t) = \frac{x_i(t)}{V_i}.$$

Por lo tanto

$$C_2(t) = C_3(t) \iff \frac{x_2(t)}{V_2} = \frac{x_3(t)}{V_3},$$

o sea

$$6\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t}) = 9\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^2,$$

y como $\mathrm{e}^{-t} > 0$ y $1-\mathrm{e}^{-t} > 0$ para todo $t > 0$ entonces podemos simplificar para obtener $\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{3}$ y luego $t = \ln 3$. Así, las concentraciones en los estanques T_2 y T_3 son iguales para $t = \ln 3$ min.

(d) Calculamos los límites de cada cantidad $x_i(t)$ cuando $t \to +\infty$ y notemos que

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0,$$

para todo $i \in \{1,2,3\}$. Esto indica que el agua limpia lava progresivamente toda la sal del sistema y a largo plazo los tres estanques quedan sin sal.

Asignación de puntaje

(a) Asignar **(1 pt)** por calcular correctamente las tasas de renovación k_i y justificar las ecuaciones de balance de sal para cada estanque, obteniendo el sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por identificar correctamente los valores propios $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.
- Asignar **(0.75 pt)** por determinar correctamente los vectores propios asociados (**(0.25 pt)** por cada uno).
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar correctamente la solución general del sistema.
- Asignar **(0.75 pt)** por aplicar la condición inicial y determinar correctamente las constantes $c_1 = 18$, $c_2 = -18$, $c_3 = 18$.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar correctamente la cantidad de sal x_i en cada estanque T_i.

(c) Asignar **(1 pt)** por plantear correctamente la ecuación $C_2(t) = C_3(t)$ y obtener $t = \ln 3$ min.

(d) Asignar **(1 pt)** por calcular $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e interpretar correctamente que el sistema pierde toda la sal a largo plazo.

4. **(6 pts)** Sea $a \in \mathbb{R}$ y considere la matriz

$$\Phi_a(t) = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Determine una matriz M_a con coeficientes constantes tal que $\Phi_a(t) = \mathrm{e}^{tM_a}$.

(b) Determine el único punto de equilibrio del sistema autónomo

$$\mathbf{Y}' = M_a \mathbf{Y}.$$

¿Para qué valores de a existe una trayectoria no trivial que satisfaga

$$\lim_{t \to +\infty} (y_1(t), y_2(t)) = (0,0)?$$

Nota. Aquí, trayectoria trivial significa la trayectoria constante $y_1(t) = y_2(t) = 0$.

Solución.

(a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Notemos que $\Phi_a(0) = I$ y $\Phi_a'(0) = M_a$. Por lo tanto, si escribimos $\Phi_a(t) = \mathrm{e}^{at} R(t)$ donde $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ entonces tenemos

$$\Phi_a'(t) = a\mathrm{e}^{at} R(t) + \mathrm{e}^{at} R'(t)$$

y en particular

$$\begin{aligned} M_a &= \Phi_a'(0) \\ &= aR(0) + R'(0) \\ &= \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Consideramos el sistema $\mathbf{Y}' = M_a \mathbf{Y}$ dado por

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = ay_1 - y_2 \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_1 + ay_2. \end{cases}$$

El único punto de equilibrio es la solución trivial $(0,0)$. Efectivamente, lo podemos justificar de dos froma

- La matriz M_a es invertible con $\det M_a = a^2 + 1 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Por lo tanto el sistema $\mathbf{Y}' = M_a \mathbf{Y}$ tiene única solución $\mathbf{Y} = 0$.
- Como $\Phi_a(t) = \mathrm{e}^{tM_a}$ es matriz fundamental del sistema, se tiene $\det \Phi_a(t) \neq 0$ para todo t, y la única solución con $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}$ es la trivial.

La solución general del sistema es $\mathbf{Y}(t) = \mathrm{e}^{tM_a}\mathbf{Y}(0) = \Phi_a(t)\mathbf{Y}(0)$ tal que

$$\|\mathbf{Y}(t)\| = \mathrm{e}^{at}\|\mathbf{Y}(0)\|.$$

- Si $a < 0$ entonces $\mathrm{e}^{at} \to 0$ cuando $t \to +\infty$, y por lo tanto toda trayectoria no trivial converge a $(0,0)$.

- Si $a = 0$ entonces $\|\mathbf{Y}(t)\| = \|\mathbf{Y}(0)\|$ para todo t, las trayectorias son círculos y no convergen a $(0,0)$.
- Si $a > 0$ entonces $\mathrm{e}^{at} \to +\infty$, las trayectorias divergen.

Por lo tanto, existen trayectorias no triviales que satisfacen $\lim_{t\to+\infty}(y_1(t), y_2(t)) = (0,0)$ si y sólo si $a < 0$.

Observación. Se considerará también la resolución directa del sistema

$$\begin{cases} ay_1 - y_2 = 0 \\ y_1 + ay_2 = 0, \end{cases}$$

para determinar el único punto de equilibrio $(0,0)$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por argumentar correctamente que $M_a = \Phi_a'(0)$.
- Asignar **(1 pt)** por calcular correctamente M_a.

(b)
- Asignar **(1.5 pts)** por justificar correctamente que el único punto de equilibrio es $(0,0)$.
- Asignar **(1 pt)** por indicar que la solución general del sistema está dada por $\mathbf{Y}(t) = \mathrm{e}^{tM_a}\mathbf{Y}(0) = \Phi_a(t)\mathbf{Y}(0)$.
- Asignar **(2 pts)** por establecer que las trayectorias no triviales satisfacen $\lim_{t\to+\infty}(y_1(t), y_2(t)) = (0,0)$ si y sólo si $a < 0$ (estudiando todos los casos ($a > 0$, $a < 0$, $a = 0$ **(0.5 pt)** por cada caso), justificando mediante $\|\mathbf{Y}(t)\| = \mathrm{e}^{at}\|\mathbf{Y}(0)\| \to 0$ **(0.5 pt)**.