Ayudantía 1

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
15 de Marzo, 2010

Resumen

Ecuaciones separables

Una ecuación separable es del tipo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

El método de resolución es muy sencillo y se muestra a continuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

¡Cuidado al dividir por $g(y)$!

Luego integramos a ambos lados de la ecuación:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \rightarrow G(y) = F(x) + C$ Solución implícita

Generalmente es posible despejar:

$y = H(x, C)$ Solución explícita

Esta solución es una familia de ecuaciones (infinitas) ya que para cada valor de C se obtiene una función solución $y(x)$. Para encontrar la solución única al problema se utiliza la condición inicial del problema para calcular C y así obtener la solución única $y(x)$. Cuando se obtienen dos ramas de la función $y(x)$ $(\pm)$ hay que elegir la correcta valiéndose de la condición inicial.

Nota: Nos damos cuenta que para realizar este método es necesario que $g(y) \neq 0$. Cuando existe un y_0 (constante) tal que $g(y_0) = 0$ decimos que $y = y_0$ es una **solución especial** ya que por un lado, $y' = y_0' = 0$ por ser una constante y por otro lado $f(x)g(y_0) = f(x) \cdot 0 = 0$ ya que $g(y_0) = 0$. Luego se cumple que ${y_0}' = f(x)g(y_0) = 0$, por lo tanto, $y = y_0$ es también solución a la ecuación.

Modelos

Modelo exponencial: modela crecimiento poblacional, material radiactivo, etc.

Crecimiento exponencial: $y' = ky$

Decrecimiento exponencial: $y' = -ky$

Modelo logístico: modela población de peces en un lago donde $y(t)$ es la cantidad de peces en el lago que crecen a una tasa k y cuyo lago sustenta hasta M peces.

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

Notamos que:

$y = 0 \rightarrow y' = 0$ Al no haber peces en el lago no hay crecimiento de la cantidad de peces.

$0 < y < M \rightarrow y' > 0$ Cuando la cantidad de peces es menor a la capacidad del lago hay crecimiento de la población de peces.

$y = M \rightarrow y' = 0$ Cuando la cantidad de peces es justo la capacidad máxima del lago no hay variación en la cantidad de peces en el lago.

$y > M \rightarrow y' < 0$ Al haber más peces en el lago que su capacidad la población de peces tiende a disminuir.

Modelo de Newton de Enfriamiento: modela la variación de temperatura donde A es la temperatura ambiente y $T(t)$ la temperatura del objeto en un determinado momento. La constante k es propia de cada material.

$$T' = k(A - T)$$

Ejercicios

1) **Sea $\frac{dP}{dt} = kP$, donde $k \in \mathbb{R}$ y $k > 0$**

   Si $P(0) = 1000$
   $P(1) = 2000$

   a) **Encuentre $P(t)$**
   b) **$P(3)$**

Solución:

a) Claramente es un ejercicio de separación de variables del tipo modelo de crecimiento exponencial. Resolvemos por el método ya mencionado:

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

Nos damos cuenta que al dividir por $P(t)$ aparece una solución especial a la ecuación, $P(t) = 0$, que claramente satisface la ecuación diferencial pero no es solución al problema ya que no cumple con las dos condiciones $P(0) = 1000$, $P(1) = 2000$ porque estamos diciendo que para cualquier valor de t el valor de $P(t)$ será siempre cero. Luego para este ejercicio la solución especial no es solución al problema. Siguiendo con la resolución procedemos a integrar:

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt \rightarrow \ln|P| = kt + C$$

La función logaritmo solo está definida para entradas positivas.

$$\ln|P| = kt + C \rightarrow |P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt} = Ae^{kt}$$
$$P = \pm Ae^{kt}$$

No es necesario utilizar el $\pm$ ya que el signo dependerá del valor de la constante A, luego la solución a la ecuación es:

$$P(t) = Ae^{kt}$$

Esta es una familia de soluciones ya que para cada valor de A se obtiene una solución nueva. Para encontrar los valores de A y k y así encontrar la solución única al problema debemos evaluar la solución con las condiciones impuestas:

$P(0) = 1000 \rightarrow 1000 = Ae^{k\cdot 0} = A \rightarrow A = 1000$
$P(1) = 2000 \rightarrow 2000 = Ae^{k} = 1000e^{k} \rightarrow e^{k} = 2 \rightarrow k = \ln 2$

Luego la solución es:

$$P(t) = 1000e^{(\ln 2)t} = 1000e^{\ln 2^t} = 1000 \cdot 2^t$$
$$\therefore P(t) = 1000 \cdot 2^t$$

b) $P(3) = 1000 \cdot 2^3 = 1000 \cdot 8 = 8000$

2) Sea $\frac{dy}{dx} = -6xy$

a) Resolver para $y(0) = 7$
b) Resolver para $y(0) = -4$

Solución:

La ecuación corresponde a una ecuación de variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = -6xy \rightarrow \frac{dy}{y} = -6xdx$$

Notamos que $y = 0$ satisface la ecuación (solución especial) pero no satisface las condiciones iniciales $y(0) = 7$ ni $y(0) = -4$. Luego no es solución al problema. Integramos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -6xdx \rightarrow \ln|y| = -3x^2 + C \rightarrow |y| = e^{-3x^2+C}$$
$$|y| = e^{-3x^2+C} = e^C e^{-3x^2} = Ae^{-3x^2}$$
$$\therefore y = Ae^{-3x^2}$$

El signo dependerá de la constante A como se verá a continuación:

a) Para $y(0) = 7 \rightarrow 7 = Ae^{-3\cdot 0^2} = A \rightarrow A = 7$
$$\therefore y(x) = 7e^{-3x^2}$$

b) Para $y(0) = -4 \rightarrow -4 = Ae^{-3\cdot 0^2} = A \rightarrow A = -4$

$$\therefore y(x) = -4e^{-3x^2}$$

3) Resolver $x^3y' = y^2$

Solución:

Procedemos a la resolución por separación de variables:

$$x^3y' = y^2 \rightarrow x^3\frac{dy}{dx} = y^2 \rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3}, \qquad x \neq 0$$

Rápidamente nos damos cuenta que $y = 0$ satisface la ecuación (solución especial). Integramos:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + C \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} - C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} - C \rightarrow y = \frac{2x^2}{1 - 2Cx^2}$$

$$\therefore y = \frac{2x^2}{1 - Bx^2}$$

Existen infinitas soluciones a la ecuación para cada valor de B. Notamos que la solución se indefine para $x = \pm\frac{1}{\sqrt{B}}$. Luego los posibles intervalos solución son: $I \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{B}}\right), I \in \left(-\frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{B}}\right), I \in \left(\frac{1}{\sqrt{B}}, +\infty\right)$. A pesar de haber excluido $x = 0$, la solución no se indefine para este valor e incluso satisface la ecuación en este punto. También $y = 0$ es solución especial de la ecuación con intervalo solución $I \in (-\infty, +\infty)$.

4) Resolver el siguiente problema con valores iniciales:

$$\boldsymbol{y' = \sqrt{1 - y^2}}$$
$$\boldsymbol{y(0) = 0}$$

Solución:

Procedemos a la resolución por separación de variables:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2} \rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx$$

Notamos que $y = \pm 1$ son soluciones especiales de la ecuación pero no del problema ya que no satisfacen la condición inicial. Luego procedemos a integrar:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx + C$$

Hacemos el cambio de variable: $y = sen(u),\ dy = \cos(u)du$ y reemplazamos:

$$\int \frac{\cos(u)du}{\sqrt{1 - sen(u)^2}} = x + C \rightarrow \int \frac{\cos(u)du}{\cos(u)} = x + C \rightarrow \int du = x + C \rightarrow u = x + C$$

$$y = sen(u) \rightarrow u = arcsen(y)$$

$$arcsen(y) = x + C$$

Es importante darse cuenta que la función $arcsen(y)$ tiene como dominio el conjunto $[-1,1]$ y como imagen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Luego se deduce que $y \in (-1,1)$ y que $x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$y = sen(x + C)$$

Para calcular C usamos la condición inicial $y(0) = 0$:

$$0 = sen(0 + C) \rightarrow sen(C) = 0$$
$$\therefore C = 0, \pi, 2\pi \ldots$$

Para cada uno de estos valores de C se obtiene una solución a la ecuación diferencial que pasa por $(0,0)$. Elijamos $C = 0$ para analizar bien el intervalo solución:

$$y(x) = sen(x)$$

La función seno tiene dominio en todos los reales, pero en nuestra ecuación diferencial solo es solución en $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ por lo mencionado antes.

De hecho, para que sea solución debe cumplir la ecuación diferencial. Esto es:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \rightarrow sen(x)' = \sqrt{1 - sen(x)^2}$$
$$\cos(x) = \sqrt{\cos(x)^2} = |\cos(x)|$$

Esto se cumple solo en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Luego nuestro intervalo solución es:

$$I \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

5) **I1 1-2008**
   a) **En un refrigerador con temperatura ambiente interior de 2°C se ingresa una pieza de metal a las 8:58 AM. Si su temperatura a las 9:00 y 9:02 es de 10°C y 6°C respectivamente, ¿cuál es la temperatura inicial del metal?**
   b) **A las 9:06 se saca la pieza de metal del refrigerador y se introduce a un horno con temperatura inicial de 20°C que aumenta su temperatura a una tasa constante de $1\ ^{\circ C}/_{min}$. Determine la temperatura de la pieza de metal a las 9:08.**

Solución:

a) Ocupamos el modelo de enfriamiento de Newton:

$$T' = k(A - T)$$

Resolvemos por el método de separación de variables. Del problema nos dicen que la temperatura ambiente es de 2°C, es decir, $A = 2$.

$$T' = k(2-T) \rightarrow \frac{dT}{dt} = k(2-T) \rightarrow \frac{dT}{(2-T)} = kdt$$

Notamos que $T = 2$ es solución especial de la ecuación pero no del problema ya que nos dicen que la temperatura varía, luego no puede ser constante. Integramos:

$$\int \frac{dT}{(2-T)} = \int kdt + C \rightarrow -\ln|2-T| = kt + C \rightarrow \ln|T-2| = -kt - C$$
$$\ln|T-2| = -kt - C \rightarrow |T-2| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt} = Ae^{-kt}$$
$$T - 2 = Ae^{-kt}$$
$$\therefore T(t) = 2 + Ae^{-kt}$$

Hacemos $t = 0$ a las 8:58 AM, $t = 2$ a las 9:00 y $t = 4$ a las 9:02. También se podría hacer como $t = -2$ a las 8:58 AM, $t = 0$ a las 9:00 y $t = 2$ a las 9:02. En ambas se llega a la misma solución ya que lo que interesa es el intervalo de tiempo transcurrido y no el tiempo en sí. Trabajaremos de la primera forma para encontrar las constantes A y k mediante las condiciones del problema: $T(2) = 10,\ T(4) = 6$.

$$T(2) = 10 \rightarrow 10 = 2 + Ae^{-k\cdot 2} \rightarrow Ae^{-2k} = 8$$
$$T(4) = 6 \rightarrow 6 = 2 + Ae^{-k\cdot 4} \rightarrow Ae^{-4k} = 4$$

Dividimos ambas ecuaciones:

$$\frac{Ae^{-2k}}{Ae^{-4k}} = \frac{8}{4} \rightarrow e^{2k} = 2 \rightarrow 2k = \ln 2 \rightarrow k = \frac{1}{2}\ln 2$$

Luego reemplazamos para obtener A:

$$Ae^{-2\cdot\frac{1}{2}\ln 2} = 8 \rightarrow Ae^{-\ln 2} = 8 \rightarrow A = 8e^{\ln 2} = 8 \cdot 2 = 16$$

$$\therefore T(t) = 2 + 16e^{-\frac{1}{2}\ln 2t}$$

Nos piden la temperatura inicial del metal, es decir:

$$T(0) = 2 + 16e^{-\frac{1}{2}\ln 2\cdot 0} = 2 + 16 = 18$$
$$\therefore T(0) = 18°C$$

Nota: Si hubiéramos utilizado el sistema de tiempo $t = -2$ a las 8:58 AM, $t = 0$ a las 9:00 y $t = 2$ a las 9:02 las condiciones hubieran sido $T(0) = 10,\ T(2) = 6$ y nos hubiera dado la función solución:

$$T(t) = 2 + 8e^{-\frac{1}{2}\ln 2t}$$

La temperatura inicial se hubiera calculado como:

$$T(-2) = 2 + 8e^{-\frac{1}{2}\ln 2\cdot(-2)} = 2 + 8e^{\ln 2} = 2 + 8 \cdot 2 = 18$$

Como se aprecia la solución numérica es la misma. También se aprecia que el valor de $k = \frac{1}{2}\ln 2$ es el mismo para ambos sistemas de tiempo, es decir, es independiente de esto y es propio del material.

b) Calculamos la temperatura de la pieza de metal cuando fue extraída del refrigerador a las 9:06, es decir, en $t = 8$:

$$T(8) = 2 + 16e^{-\frac{1}{2}\ln 2 \cdot 8} = 2 + 16e^{-4\ln 2} = 2 + 16e^{\ln 2^{-4}} = 2 + 16 \cdot 2^{-4} = 2 + 1 = 3$$

Como la pieza de metal se introduce a un horno cambiamos nuestro sistema de tiempo a $t = 0$ cuando la pieza de metal ingresa al horno con la temperatura inicial de $T(0) = 3$ que es la temperatura a la que salió del refrigerador. Nuevamente ocupamos el modelo de enfriamiento de Newton:

$$T' = k(A - T)$$

Donde $k = \frac{1}{2}\ln 2$ es conocido ya que es propio del metal. La temperatura ambiente ya no es constante ya que cambia a una tasa constante de $1\ ^{\circ C}/_{min}$ e inicialmente es 20°C, es decir, $A = A(t)$ y se rige por la ecuación:

$A' = 1$ (tasa constante de $1\ ^{\circ C}/_{min}$)

Luego:

$$A' = 1 \rightarrow A(t) = t + C, \qquad A(0) = 20$$
$$20 = 0 + C \rightarrow C = 20$$
$$\rightarrow A = A(t) = t + 20$$

Reemplazamos en el modelo y nos queda:

$$T' = \frac{1}{2}\ln 2\,(t + 20 - T)$$

Este problema no se puede resolver con separación de variables si no que con el método lineal que veremos la próxima ayudantía.

Ayudantía 2

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
22 de Marzo, 2010

Resumen

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es del tipo:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Donde el coeficiente que acompaña a y' es 1. Para resolver este tipo de ecuaciones debemos multiplicar a ambos lados por el factor integrante:

$$e^{\int p(x)dx}$$

Multiplicamos:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

De esta forma podemos reagrupar el lado izquierdo de la ecuación de manera que nos quede una derivada exacta de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Integramos:

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)dx = \int q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$
$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx} + Ce^{-\int p(x)dx}$$

Nota: no vale la pena aprenderse la solución de memoria. Lo mejor es resolver lo anterior para cada ejercicio lo que simplifica mucho las cosas.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se dice homogénea si y solo si $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$ para todo $\alpha \neq 0$. Luego, la ecuación se puede escribir como:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Luego para resolver este tipo de ecuaciones se hace la sustitución:

$$v = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

Luego:

$$y = vx$$
$$y' = v'x + v$$

Reemplazando se obtiene:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow v'x + v = F(v) \rightarrow v'x = F(v) - v$$
$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

Claramente llegamos a una ecuación de variables separables:

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

Realizando la sustitución antes dicha siempre llegamos a una ecuación de variables separables. Ojo que de $F(v) = v$ obtenemos una solución especial a la ecuación de variables separables. Luego se resuelve mediante el método de variables separables y se reemplaza $v = \frac{y}{x}$.

Ejercicios

1) **Siguiendo con el ejercicio de la ayudantía anterior: A las 9:06 se saca la pieza de metal del refrigerador y se introduce a un horno con temperatura inicial de 20°C que aumenta su temperatura a una tasa constante de $1\ ^{\circ C}/_{min}$. Determine la temperatura de la pieza de metal a las 9:08.**

Solución:

Teníamos que $T' = \frac{1}{2}\ln 2\,(t + 20 - T)$ y que $T(0) = 3$, luego agrupamos la ecuación para llegar a una ecuación lineal:

$$T' = \frac{1}{2}\ln 2\,(t + 20 - T) \rightarrow T' + \frac{1}{2}\ln 2 \cdot T = \frac{1}{2}\ln 2\,(t + 20)$$

Se aprecia que $p(t) = \frac{1}{2}\ln 2$. Luego el factor integrante será:

$$e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{1}{2}\ln 2 dt} = e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación:

$$T' e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} + \left(\frac{1}{2}\ln 2\right) T e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \frac{1}{2}\ln 2\,(t + 20) e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Agrupamos la parte izquierda de la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}\right) = \frac{1}{2}\ln 2\,(t+20)e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Integramos y nos queda:

$$Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \int \frac{1}{2}\ln 2\,(t+20)e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt + C$$
$$Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \int \left(\frac{1}{2}\ln 2\right)te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt + \int \left(\frac{1}{2}\ln 2\right)20e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt + C$$
$$Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \frac{1}{2}\ln 2\int te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt + 10\ln 2\int e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt + C$$

Para resolver la integral $\int te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt$ debemos hacer la sustitución:

$$u = t \to du = dt, \qquad dv = e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt, v = \frac{2}{\ln 2}e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Luego:

$$\int te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt = \frac{2}{\ln 2}te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} - \int \frac{2}{\ln 2}e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt$$
$$\int te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt = \frac{2}{\ln 2}te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} - \frac{2}{\ln 2}\int e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt$$
$$\int te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt = \frac{2}{\ln 2}te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} - \left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2 e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Por otro lado:

$$\int e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}dt = \frac{2}{\ln 2}e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Juntando todo tenemos que:

$$Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \frac{1}{2}\ln 2\left(\frac{2}{\ln 2}te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} - \left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2 e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}\right) + 10\ln 2\left(\frac{2}{\ln 2}e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}\right) + C$$
$$Te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} = \left(te^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t} - \frac{2}{\ln 2}e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}\right) + 10\left(2e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}\right) + C$$
$$T = t - \frac{2}{\ln 2} + 20 + Ce^{-\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Como $T(0) = 3$ procedemos a calcular C:

$$3 = 0 - \frac{2}{\ln 2} + 20 + Ce^{-\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)0}$$
$$3 = -\frac{2}{\ln 2} + 20 + C$$

$$C = -17 + \frac{2}{\ln 2}$$

$$\therefore T = t - \frac{2}{\ln 2} + 20 + \left(\frac{2}{\ln 2} - 17\right) e^{-\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$$

Nos piden la temperatura a las 9:08 pero como nuestro nuevo sistema de tiempo es $t = 0$ a las 9:06 necesitamos la temperatura para $t = 2$. Esto es:

$$T(2) = 2 - \frac{2}{\ln 2} + 20 + \left(\frac{2}{\ln 2} - 17\right) e^{-\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)2}$$
$$T(2) = 22 - \frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{2}{\ln 2} - 17\right) e^{-\ln 2}$$
$$T(2) = 22 - \frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{2}{\ln 2} - 17\right)\frac{1}{2}$$
$$T(2) = 22 - \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{17}{2} = \frac{27}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$
$$\therefore T(2) \approx 12.0573°C$$

2) Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{\left(x^2 + 1\right)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x}$$

Solución:

No podemos resolver por separación de variables ya que el término libre es distinto de cero $(6x)$. Debemos llevar la ecuación a la forma: $y' + p(x)y = q(x)$.

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x \ / : (x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{(x^2 + 1)}y = \frac{6x}{(x^2 + 1)}$$

Luego: $p(x) = \frac{3x}{(x^2+1)}$. Luego el factor integrante es:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3x}{(x^2+1)}dx}$$

Para resolver la integral $\int \frac{3x}{(x^2+1)}dx$ hacemos la sustitución:

$$x^2 + 1 = u, \ \ 2xdx = du \rightarrow \ xdx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{3x}{(x^2 + 1)}dx = \int \frac{3}{2u}du = \frac{3}{2}\ln|u| = \frac{3}{2}\ln|x^2 + 1| = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

Luego:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3x}{(x^2+1)}dx} = e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por el factor integrante y obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{3x}{(x^2+1)}y(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{6x}{(x^2+1)}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Reagrupamos el lado izquierdo y simplificamos el lado derecho y nos queda:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right) = 6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Integramos:

$$y(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \int 6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx + C$$

Para resolver la integral hacemos sustitución:

$$x^2+1 = u, \quad 2xdx = du \rightarrow \quad xdx = \frac{du}{2}$$

$$y(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \int \frac{6}{2}(u)^{\frac{1}{2}}du + C$$
$$y(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$y(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = 2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$\therefore y(x) = 2 + \frac{C}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Infinitas soluciones para cada valor de C.

3) **Resuelva la siguiente ecuación diferencial:**

$$\boldsymbol{2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2}$$

Solución:

Claramente no es una ecuación de variables separables ya que no se puede agrupar de manera que a un lado quede todo lo que dependa de x y al otro todo lo que dependa de y. Luego intentamos determinar si es una ecuación lineal:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2 \quad / \; 2xy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}$$

Claramente tampoco es una ecuación lineal. Como último recurso por ahora intentamos verificar si es una ecuación homogénea de la forma $y' = f(x,y)$ donde $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)\ \forall \alpha \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \rightarrow y' = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \rightarrow f(x,y) = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}$$
$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{2\alpha x}{\alpha y} + \frac{3\alpha y}{2\alpha x} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}$$

Efectivamente es una ecuación homogénea. De hecho se podía determinar a simple vista observando que sólo hay términos de la forma $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$.

Luego resolvemos con el método de las ecuaciones homogéneas:

$$v = \frac{y}{x}$$
$$y = vx$$
$$y' = v'x + v$$

Reemplazamos y obtenemos una ecuación de variables separables:

$$v'x + v = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v$$
$$v'x = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v - v$$
$$v'x = \frac{2}{v} + \frac{1}{2}v$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{2}{v} + \frac{1}{2}v}{x}$$
$$\frac{dv}{\frac{2}{v} + \frac{1}{2}v} = \frac{dx}{x}$$

Integramos:

$$\int \frac{dv}{\frac{2}{v} + \frac{1}{2}v} = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\int \frac{dv}{\frac{v^2+4}{2v}} = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\int \frac{2vdv}{v^2+4} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Hacemos la sustitución:

$$v^2 + 4 = u, \quad 2vdv = du$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\ln|u| = \ln|x| + C \ / \ \exp$$
$$|u| = e^{\ln|x|+C} = e^{\ln|x|}e^{C} = A|x|$$

Reemplazamos $v^2 + 4 = u$:

$$|v^2 + 4| = A|x|$$
$$v^2 + 4 = A|x|, \ \ v^2 + 4 > 0$$

Reemplazamos $v = \frac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4 = A|x|$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = A|x| - 4$$
$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{A|x| - 4}$$
$$y(x) = \pm x\sqrt{A|x| - 4}$$

$x \neq 0$ y además $A|x| > 4 \rightarrow A > \frac{4}{|x|}$. Luego A debe ser positivo.

4) **Un estanque de capacidad 1000 L contiene inicialmente 200 L de solución de sal. Al estanque entra a razón $4\frac{L}{min}$ solución de sal cuya concentración es de $1\frac{g}{L}$. Bien mezclado, del estanque sale líquido a razón de $2\frac{L}{min}$. Si la concentración inicial de sal en el estanque es de $\frac{13}{4}\frac{g}{L}$, determine el instante en que la concentración de sal en el estanque llega a ser igual a $2\frac{g}{L}$.**

Solución:

Definimos:

$A(t) =$ gramos de sal en el estanque en el instante t (min).
$V(t) =$ litros de solución de sal en el estanque en el instante t.
$C(t) = \frac{A(t)}{V(t)} =$ concentración de sal en $\frac{g}{L}$ en el estanque en el instante t.

La tasa a la que cambia el volumen en el estanque es:

$$\frac{dV(t)}{dt} = (flujo\ que\ entra) - (flujo\ que\ sale)$$
$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\frac{L}{min} - 2\frac{L}{min} = 2\frac{L}{min}$$
$$\rightarrow V' = 2$$

Integramos:

$$V(t) = 2t + C$$

Del enunciado sabemos que: $V(0) = 200\ L$

$$V(0) = 200 = C$$
$$\therefore V(t) = 2t + 200$$

Por otro lado, la tasa a la que cambian los gramos en el estanque es:

$$\frac{dA(t)}{dt} = (gramos\ que\ entran) - (gramos\ que\ salen)$$
$$\frac{dA(t)}{dt} = C_{in}V_{in}{}' - C_{out}V_{out}{}'$$
$$\frac{dA(t)}{dt} = 1\frac{g}{L} \cdot 4\frac{L}{min} - C_{(t)}.2\frac{L}{min}$$

Pero $C(t) = \frac{A(t)}{V(t)} = \frac{A(t)}{2t+200}$. Luego reemplazamos y nos queda:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 4\frac{g}{min} - \frac{2A(t)}{2t+200}\frac{g}{min}$$
$$\frac{dA(t)}{dt} = 4 - \frac{A(t)}{t+100}$$
$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{A(t)}{t+100} = 4$$

Claramente llegamos a una ecuación lineal donde $p(t) = \frac{1}{t+100}$. Luego el factor integrante viene dado por:

$$e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t+100}dt} = e^{\ln|t+100|} = |t+100| = t+100, \quad t > 0$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dA(t)}{dt}(t+100) + \frac{A(t)}{t+100}(t+100) = 4(t+100)$$
$$\frac{d}{dt}(A(t+100)) = 4t + 400$$
$$A(t+100) = 2t^2 + 400t + B$$
$$\therefore A(t) = \frac{2t^2 + 400t + B}{t+100}$$

Para calcular la constante B ocupamos el dato de enunciado que nos dice que $C(0) = \frac{13}{4}$.

$$C(t) = \frac{A(t)}{V(t)} \rightarrow\ C(0) = \frac{A(0)}{V(0)} \rightarrow A(0) = C(0)V(0) = \frac{13}{4} \cdot 200 = 650$$

$$A(0) = 650 = \frac{2 \cdot 0^2 + 400 \cdot 0 + B}{0+100} = \frac{B}{100} \rightarrow B = 65000$$
$$\rightarrow A(t) = \frac{2t^2 + 400t + 65000}{t+100}$$

Luego:

$$C(t) = \frac{\frac{2t^2 + 400t + 65000}{t + 100}}{2t + 200} = \frac{t^2 + 200t + 32500}{(t + 100)^2}$$

Como nos piden el instante en que la concentración es igual a $2\frac{g}{L}$ debemos encontrar t^* tal que $C(t^*) = 2$. Esto es:

$$C(t^*) = \frac{t^{*2} + 200t^* + 32500}{(t^* + 100)^2} = 2$$
$$t^{*2} + 200t^* + 32500 = 2(t^* + 100)^2$$
$$t^{*2} + 200t^* + 32500 = 2\left(t^{*2} + 200t^* + 10000\right)$$
$$t^{*2} + 200t^* + 32500 = 2t^{*2} + 400t^* + 20000$$
$$t^{*2} + 200t^* - 12500 = 0$$
$$(t^* - 50)(t^* + 250) = 0$$
$$\therefore t^* = 50\ min$$

5) Mediante una sustitución adecuada resuelva:

$$\boldsymbol{xy' = 2x^2y + y \ln y}$$

Solución:

Intentamos determinar qué tipo de ecuación es despejando y':

$$y' = 2xy + \frac{y}{x}\ln y, \quad x \neq 0$$

La ecuación no es ni de variables separables ni homogénea ni lineal. Debemos buscar una sustitución adecuada para llevarla a una ecuación conocida. Comencemos por dividir por y:

$$\frac{y'}{y} = 2x + \frac{1}{x}\ln y$$

El término $\ln y$ es el que nos molesta, luego veamos que pasa si hacemos la sustitución $u = \ln y, \ \ u' = \frac{y'}{y}$. Luego:

$$\frac{y'}{y} = 2x + \frac{1}{x}\ln y \rightarrow u' = 2x + \frac{1}{x}u \rightarrow u' - \frac{1}{x}u = 2x$$

Llegamos a una ecuación lineal con:

$$p(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow \ e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

Multiplicamos y nos queda:

$$u'\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}u\frac{1}{|x|}=2x\frac{1}{|x|}$$
$$\frac{d}{dx}\left(u\frac{1}{|x|}\right)=2x\frac{1}{|x|}$$
$$\frac{u}{|x|}=\int 2x\frac{1}{|x|}dx+C|x|$$
$$u=2|x|\int\frac{x}{|x|}dx+C|x|$$

$$u=\begin{Bmatrix} 2x\int\frac{x}{x}dx+Cx=2x\int dx+Cx\,, & x>0 \\ -2x\int\frac{x}{-x}dx-Cx=2x\int dx-Cx\,, & x<0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow u=2x^2+Bx$$

Reemplazamos $u=\ln y$:

$$\ln y=2x^2+Bx$$
$$\therefore y(x)=\ e^{2x^2+Bx}$$

Ayudantía 3

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
29 de Marzo, 2010

Resumen

Ecuaciones Bernoulli

Una ecuación tipo Bernoulli es del tipo:

$y' + p(x)y = q(x)y^n$, $\quad n \neq \{0,1\}$ $\quad$ ($n = 0 \rightarrow$ ecuación lineal, $n = 1 \rightarrow$ ecuación separable)

Para resolver este tipo de ecuaciones se sustituye por una variable auxiliar de la siguiente manera:

$v = y^{1-n} \rightarrow y = v^{1/(1-n)}$

Derivando se obtiene:

$y' = \frac{1}{1-n} v^{(\frac{1}{1-n}-1)} v' = \frac{1}{1-n} v^{\frac{n}{1-n}} v'$, por regla de la cadena.

Reemplazando en la ecuación de Bernoulli se obtiene:

$\frac{1}{1-n} v^{\frac{n}{1-n}} v' + p(x) v^{\frac{1}{1-n}} = q(x) v^{\frac{n}{1-n}}$

Como $n \neq 1$ y $v^{\frac{n}{1-n}} \neq 0$ podemos dividir la ecuación por el término $\frac{1}{1-n} v^{\frac{n}{1-n}}$ y nos queda:

$v' + (1-n)p(x) v^{\frac{1}{1-n} - \frac{n}{1-n}} = (1-n)q(x) v^{\frac{n}{1-n} - \frac{n}{1-n}}$

$\rightarrow v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x)$ **¡Ecuación lineal!**

Luego se procede a su resolución como ecuación lineal. Calculamos el factor integrante: $e^{\int (1-n)p(x)dx}$ y multiplicamos a ambos lados de la ecuación:

$$\rightarrow v' e^{\int (1-n)p(x)dx} + (1-n)p(x) v e^{\int (1-n)p(x)dx} = (1-n)q(x) e^{\int (1-n)p(x)dx}$$

Como sabemos, el lado derecho de la ecuación se puede reducir a $\frac{d}{dx}(v e^{\int (1-n)p(x)dx})$. Luego nos queda:

$\frac{d}{dx}\left(v e^{\int (1-n)p(x)dx}\right) = (1-n)q(x) e^{\int (1-n)p(x)dx}$

Integrando nos queda:

$$v e^{\int (1-n)p(x)dx} = \int (1-n)q(x) e^{\int (1-n)p(x)} dx + C$$

Despejando nos queda:

$$v = (1-n)e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx + Ce^{-\int(1-n)p(x)dx}$$

Luego reemplazamos $v = y^{1-n}$ y nos queda:

$$y^{1-n} = (1-n)e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx + Ce^{-\int(1-n)p(x)dx}$$

Luego:

$$y = \left[(1-n)e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx + Ce^{-\int(1-n)p(x)dx}\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Nota: no vale la pena aprenderse la solución de memoria. Lo mejor es resolver lo anterior para cada ejercicio lo que simplifica mucho las cosas.

Ecuaciones exactas

Tenemos la función $F(x,y) = K$ cuyo diferencial equivale a:

$$dF(x,y) = F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad o \quad F_x(x,y) + F_y(x,y)y' = 0$$

Cuya solución es obviamente $F(x,y) = K$. Generalmente la ecuación se escribe como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad M(x,y) = F_x(x,y), \qquad N(x,y) = F_y(x,y)$$

Para saber si una ecuación diferencial es exacta, basta con verificar que: $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ $(F_{xy} = F_{yx})$.

Para resolver este tipo de ecuaciones se realiza el siguiente sistema:

$$(1)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y) = M(x,y)$$
$$(2)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y) = N(x,y)$$

Se puede integrar parcial tanto (1) con respecto a x o (2) con respecto a y. Integramos parcialmente (1) con respecto a x y nos queda:

$F(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y)$, donde $h(y)$ es la **constante que puede depender de y**.

Luego se procede a derivar parcialmente este término con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + h(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y}h(y)$$

Luego igualamos con (2) y nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y}h(y) = N(x,y)$$

Como $h(y)$ depende solamente de y y no de x nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{d}{dy}h(y) = N(x,y)$$

Queremos calcular $h(y)$, luego resolvemos la nueva ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dy}h(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Notar que para obtener $h = h(y)$ es necesario que el término $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ no dependa de x, es decir, los x's deben eliminarse en el proceso, lo que siempre ocurre cuando la ecuación diferencial inicial es exacta. Cuando no lo es, el término anterior depende de x y no podemos continuar con el método. Con las exigencias anteriores llegamos a que:

$$h(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Finalmente llegamos a que:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C = K$$

Nota: no vale la pena aprenderse la solución de memoria. Lo mejor es resolver lo anterior para cada ejercicio lo que simplifica mucho las cosas.

Factores integrantes

Un factor integrante es una función $u = u(x,y)$ que al multiplicarlo a una ecuación diferencial del tipo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ que no sea exacta, es decir, que $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, la transforma en una ecuación exacta. Luego, para resolver la ecuación, basta con encontrar u. Generalmente $u = u(x)$ o $u = u(y)$. Luego la nueva ecuación diferencial nos queda:

$$[uM(x,y)]dx + [uN(x,y)]dy = 0$$

Como buscamos que esta nueva ecuación sea exacta se debe cumplir que:

$$[uM(x,y)]_y = [uN(x,y)]_x$$

Si suponemos que $u = u(x)$ (análogo para $u = u(y)$) tenemos que:

$[uM(x,y)]_y = uM_y(x,y)$, ya que u es constante con respecto a y
$[uN(x,y)]_x = u_xN(x,y) + uN_x(x,y)$, por regla del producto

Luego:

$uM_y(x,y) = u_xN(x,y) + uN_x(x,y)$

Despejando:

$$u_x = u\frac{[M_y(x,y) - N_x(x,y)]}{N(x,y)}$$

Si al resolver u, no se obtiene una función $u = u(x)$, sino que depende también de y, se llega a una contradicción y no existe dicho factor integrante. Habría que intentar nuevamente para el caso $u = u(y)$. Si por alguna razón la función fuera de la forma $u = u(x,y)$ posiblemente ésta sea dato del problema. Una vez conocido u se prosigue a resolver la ecuación usando el método de las ecuaciones exactas.

Ejercicios

1) **Resuelva:**
   a) $\boldsymbol{xy' + y = x^4y^3}$
   b) $\boldsymbol{xy' + 6y = 3xy^{4/3}}$

Solución:

a) Tenemos la siguiente ecuación diferencial: $xy' + y = x^4y^3$. Siempre es conveniente dejar aislado a y', por ende, procedemos a dividir por x ($x \neq 0$) y nos queda:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3y^3, x \neq 0$$

Claramente es una ecuación del tipo Bernoulli. Procedemos a realizar la sustitución correspondiente:

$v = y^{1-3} = y^{-2} \rightarrow \ y = v^{-\frac{1}{2}}$

Derivando obtenemos:

$$y' = -\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}-1}v' = -\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}v'$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}v' + \frac{1}{x}v^{-\frac{1}{2}} = x^3v^{-\frac{3}{2}}$$

Dividimos por $-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}$ y nos queda:

$v' - \frac{2}{x}v = -2x^3$ (Ecuación lineal)

Calculamos el factor integrante:

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x^{-2}|} = |x^{-2}| = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por el factor integrante y nos queda:

$$v'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}v\frac{1}{x^2} = -2x^3\frac{1}{x^2}$$

Esto se puede agrupar como:

$$\frac{d}{dx}\left(v\frac{1}{x^2}\right) = -2x$$

Integramos y nos queda:

$$v\frac{1}{x^2} = -x^2 + C$$

Despejamos:

$$v = -x^4 + Cx^2$$

Reemplazamos $v = y^{-2}$ y nos queda:

$$y^{-2} = -x^4 + Cx^2 \rightarrow\therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{-x^4 + Cx^2}}$$

Veamos los intervalos solución para este problema: la solución se indefine o se vuelve compleja para $-x^4 + Cx^2 < 0$, es decir, para $x = 0, x > \sqrt{C}, x < -\sqrt{C}$. Luego los posibles intervalos solución son (para C positivo):

$$I \in \left(-\sqrt{C}, 0\right) \quad , \quad I \in \left(0, \sqrt{C}\right)$$

El intervalo depende de la condición inicial del problema. **¡Los intervalos no se superponen!**

b) Tenemos la siguiente ecuación diferencial: $xy' + 6y = 3xy^{4/3}$. Dividimos por x ($x \neq 0$) y nos queda:

$$y' + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$$

Claramente es una ecuación del tipo Bernoulli. Procedemos a realizar la sustitución correspondiente:

$v = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \ y = v^{-3}$

Derivando obtenemos:

$$y' = -3v^{-3-1}v' = -3v^{-4}v'$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$-3v^{-4}v' + \frac{6}{x}v^{-3} = 3v^{-4}$$

Dividimos por $-3v^{-4}$ y nos queda:

$v' - \frac{2}{x}v = -1$ (Ecuación lineal)
Calculamos el factor integrante:

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x^{-2}|} = |x^{-2}| = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por el factor integrante y nos queda:

$$v'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}v\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Esto se puede agrupar como:

$$\frac{d}{dx}\left(v\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Integramos y nos queda:

$$v\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + C$$

Despejamos:

$$v = x + Cx^2$$

Reemplazamos $v = y^{-\frac{1}{3}}$ y nos queda:

$$y^{-\frac{1}{3}} = x + Cx^2 \rightarrow \therefore y = \left(\frac{1}{x + Cx^2}\right)^3$$

Veamos los intervalos solución para este problema: la solución se indefine para $x + Cx^2 = 0$, es decir, para $x = 0, x = -\frac{1}{C}$. Luego los posibles intervalos solución son (para C positivo):

$$I \in \left(-\infty, -\frac{1}{C}\right) \quad , \quad I \in \left(-\frac{1}{C}, 0\right) \quad , \quad I \in (0, +\infty)$$

2) I1 1-2008 Resuelva el problema de valor inicial :

$$\mathbf{2xy^2 + y + (2x^2y + x)y' = 0}, \qquad \mathbf{y(1) = 1}$$

Escriba la solución en forma explícita $y = y(x)$ indicando el intervalo de solución.

Solución:

De la ecuación podemos decir que:

$$M(x,y) = 2xy^2 + y$$
$$N(x,y) = 2x^2y + x$$

Primero que nada se determina si es una ecuación exacta o no con las derivadas cruzadas:

$M_y(x,y) = 4xy + 1$
$N_x(x,y) = 4xy + 1$

Como $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ se verifica que es una ecuación exacta. Luego procedemos a la resolución:

$$(1)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y) = M(x,y) = 2xy^2 + y$$
$$(2)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y) = N(x,y) = 2x^2y + x$$

Integramos (1) parcial con respecto a x y nos queda:

$$F(x,y) = \int (2xy^2 + y)dx + h(y)$$
$$F(x,y) = x^2y^2 + xy + h(y)$$

Luego derivamos parcialmente la función con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y^2 + xy + h(y))}{\partial y} = 2x^2y + x + h(y)'$$

E igualamos con (2):

$$2x^2y + x + h(y)' = 2x^2y + x$$
$$h(y)' = 0 \rightarrow h(y) = C$$

$$\therefore F(x,y) = x^2y^2 + xy + C = K$$

Como C y K son constantes las reducimos a una sola constante K:

$$x^2y^2 + xy = K$$

Para calcular K ocupamos la condición inicial $y(1) = 1$:

$$1^2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 = K = 2$$

Luego:

$$x^2y^2 + xy - 2 = 0$$

Nos piden $y = y(x)$, luego:

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2x^2} = \frac{-x \pm 3x}{2x^2}$$

Determinamos cual de las dos soluciones cumple la condición inicial $y(1) = 1$:

y $= \frac{-1+3}{2} = 1 \rightarrow$ cumple
$y = \frac{-1-3}{2} = -2 \rightarrow$ no cumple

Luego la solución es:

$\therefore y = \frac{-x+3x}{2x^2} = \frac{1}{x},\ x \neq 0$

El intervalo solución puede ser: $I \in (-\infty, 0)$ o $I \in (0, +\infty)$. Como $y(1)$ existe y equivale a 1 sabemos que $x = 1$ pertenece al dominio de la solución, luego el intervalo solución corresponde a $I \in (0, +\infty)$, o, lo que es lo mismo, $x > 0$.

3) **I1 2-2009 Resuelva el problema de valor inicial :**

$$\mathbf{3x^2y^2 + 4x^3 + 2yx^3y' = 0}, \qquad \mathbf{y(1) = 3}$$

Escriba la solución en forma explícita $y = y(x)$ indicando el intervalo de solución.

Solución:

Tenemos que:

$M(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3$
$N(x, y) = 2yx^3$

Verificamos que es una ecuación exacta:

$$M_y(x, y) = 6x^2y$$
$$N_x(x, y) = 6x^2y$$

Luego procedemos a la resolución:

(1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x, y) = M(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3$
(2) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x, y) = N(x, y) = 2yx^3$

Integramos parcial (1) con respecto a x y nos queda:

$$F(x, y) = \int (3x^2y^2 + 4x^3)dx + h(y)$$
$$F(x, y) = x^3y^2 + x^4 + h(y)$$

Luego derivamos parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^3y^2 + x^4 + h(y))}{\partial y} = 2x^3y + h(y)'$$

Igualamos con (2):

$$2x^3y + h(y)' = 2yx^3$$
$$h(y)' = 0 \rightarrow h(y) = C$$

Luego:

$$F(x,y) = x^3y^2 + x^4 + C = K \rightarrow x^3y^2 + x^4 = K$$

El valor de K se calcula utilizando el valor inicial $y(1) = 3$:

$$1^3 \cdot 3^2 + 1^4 = K = 10$$

$$\therefore x^3y^2 + x^4 = 10$$
$$y^2 = \frac{10 - x^4}{x^3} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{10 - x^4}{x^3}}$$

Verificamos que se cumpla $y(1) = 3$:

$y = \sqrt{\frac{10-1^4}{1^3}} = 3 \rightarrow$ cumple

$y = -\sqrt{\frac{10-1^4}{1^3}} = -3 \rightarrow$ no cumple

$$\therefore y = \sqrt{\frac{10 - x^4}{x^3}}$$

El intervalo solución es $I \in (0, \sqrt[4]{10})$

4) **Encuentre k tal que $u(x,y) = y^k$ sea factor integrante de:**

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

Y resuelva la ecuación diferencial.

Solución:

Como nos dan el factor integrante deducimos que no es una ecuación exacta. De hecho:

$M(x,y) = xy \rightarrow M_y(x,y) = x$
$N(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 20 \rightarrow N_x(x,y) = 4x$

Luego no es una ecuación exacta. Como sabemos que el factor integrante es de la forma $u = u(x,y) = u(y) = y^k$ multiplicamos a ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$xyy^k dx + y^k(2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$
$$xy^{k+1}dx + y^k(2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

Luego debemos calcular el valor de k para que la ecuación sea exacta, es decir, para que las derivadas cruzadas sean iguales. Luego exigimos esa igualdad. Nuestro nuevo $M(x,y)$ es de la forma $M(x,y) = xy^{k+1}$ y $N(x,y) = y^k(2x^2 + 3y^2 - 20)$. Luego se exige que:

$M_y(x,y) = N_x(x,y)$

Esto es:

$$\frac{\delta(xy^{k+1})}{\delta y} = \frac{\partial y^k(2x^2 + 3y^2 - 20)}{\partial x}$$
$$x(k+1)y^k = 4y^k x$$
$$xy^k(k+1-4) = 0 \rightarrow k = 3$$

Como ya conocemos el factor integrante procedemos a resolver la ecuación exacta:

(1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y) = M(x,y) = xy^4$
(2) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y) = N(x,y) = y^3(2x^2 + 3y^2 - 20)$

Integrando (1) parcial con respecto a x nos queda:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)$$

Derivamos parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{1}{2}x^2y^4 + h(y))}{\partial y} = 2x^2y^3 + h(y)'$$

Igualamos con (2):

$$2x^2y^3 + h(y)' = y^3(2x^2 + 3y^2 - 20) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$$
$$h(y)' = 3y^5 - 20y^3 \rightarrow h(y) = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + C$$

Luego:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + C = K$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = K$$

5) Demuestre que la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{4xdx + \left(y^2 + 2y + 2x^2\right)dy = 0}$$

no es exacta, pero existe función $u = u(y)$ tal que la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{u(y)\,4xdx + u(y)\left(y^2 + 2y + 2x^2\right)dy = 0}$$

es exacta. Determine $u(y)$ y resuelva la ecuación en forma implícita.

Solución:

Tenemos que:

$$M(x,y) = 4x$$
$$N(x,y) = y^2 + 2y + 2x^2$$

$$M_y(x,y) = 0$$
$$N_x(x,y) = 4x$$

Por lo tanto, no es una ecuación exacta ya que $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$. Multiplicando a ambos lados por $u(y)$ buscamos que la ecuación sea exacta y para ello debe cumplirse que:

$$[uM(x,y)]_y = [uN(x,y)]_x$$

$[uN(x,y)]_x = uN_x(x,y)$
$[uM(x,y)]_y = uM_y(x,y) + u_yM(x,y)$

Luego:

$uM_y(x,y) + u_yM(x,y) = uN_x(x,y)$

$$u_y = u\frac{\left(N_x(x,y) - M_y(x,y)\right)}{M(x,y)}$$

$$u_y = u\frac{4x}{4x} = u$$

$$\frac{du}{dy} = u \rightarrow \frac{du}{u} = dy \rightarrow \ln|u| = y + C \rightarrow |u| = e^{y+C} = e^Ce^y \rightarrow u = Ae^y$$

En particular elegimos $u = e^y$. Luego los nuevos valores de $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son:

$$M(x,y) = u(y)4x = e^y\,4x$$
$$N(x,y) = u(y)(y^2 + 2y + 2x^2) = e^y\,(y^2 + 2y + 2x^2)$$

Luego resolvemos:

$$(1)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y) = M(x,y) = 4xe^y$$
$$(2)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y) = N(x,y) = e^y\ (y^2 + 2y + 2x^2)$$

Integramos (1) parcial con respecto a x:

$$F(x,y) = \int 4xe^y dx + h(y)$$
$$F(x,y) = 2x^2e^y + h(y)$$

Derivamos parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (2x^2e^y + h(y))}{\partial y} = 2x^2e^y + h(y)'$$

Igualamos con (2):

$$2x^2e^y + h(y)' = e^y\ (y^2 + 2y + 2x^2)$$
$$2x^2e^y + h(y)' = y^2e^y + 2ye^y + 2x^2e^y$$
$$h(y)' = y^2e^y + 2ye^y$$
$$h(y) = y^2e^y + C$$

Luego:

$$F(x,y) = 2x^2e^y + y^2e^y + C = K$$
$$\therefore 2x^2e^y + y^2e^y = K$$

Ayudantía 4

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
5 de Abril, 2010

Resumen I1

Método de resolución de ecuaciones de primer orden

a) Ecuaciones separables:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \rightarrow G(y) = F(x) + C$$
$$g(y_0) = 0 \text{ Solución especial}$$

Ejemplo: $2yy' = (y^2 - 4)\cos(x)$

Solución:

$$2yy' = (y^2 - 4)\cos(x)$$
$$\frac{2y}{(y^2-4)}dy = \cos(x)\,dx \rightarrow \text{Soluciones especiales: } y = 2,\ y = -2$$
$$\int \frac{2y}{(y^2-4)}dy = \int \cos(x)dx + \mathrm{C}$$

Hacemos la sustitución: $y^2 - 4 = u,\ 2ydy = du$

$$\int \frac{du}{u} = \int \cos(x)dx + \mathrm{C}$$
$$\ln|u| = \mathrm{sen(x)} + \mathrm{C}$$
$$|u| = e^{sen(x)+C}$$
$$u = Ae^{sen(x)}$$
$$y^2 - 4 = Ae^{sen(x)}$$
$$\therefore y = \pm\sqrt{Ae^{sen(x)} + 4}$$

Notamos que en este caso las soluciones especiales sí están incluidas en la general cuando $A = 0$. Esto no siempre sucede.

b) Ecuaciones lineales:

$$y' + p(x)y = q(x)$$
$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} + Ce^{-\int p(x)dx}$$

Ejemplo: $y' + \frac{2}{x}y = x^3$

Solución:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3 \setminus \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln|x|^2} = |x|^2 = x^2$$
$$\frac{d}{dx}(yx^2) = x^5$$
$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + C$$
$$\therefore y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}, \quad x \neq 0$$

c) <u>Ecuaciones homogéneas</u>:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$v = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$
$$y = vx$$
$$y' = v'x + v$$
$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow v'x + v = F(v) \rightarrow v'x = F(v) - v$$
$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$
$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad Ecuación\ separable$$

Ejemplo: $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Solución:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$
$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

Hacemos el reemplazo: $v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx, \ y' = v'x + v$

$$v'x + v = \frac{1+v}{1-v}$$
$$\frac{dv}{dx}x = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1 + v - v + v^2}{1-v} = \frac{v^2+1}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{v^2+1}dv = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{1-v}{v^2+1}dv = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\int \frac{1}{v^2+1}dv - \int \frac{v}{v^2+1}dv = \int \frac{dx}{x} + C$$

Para la primera integral hacemos la sustitución $v = \tan(u)\,, dv = \sec(u)^2 du$ y para la segunda integral la sustitución $v^2 + 1 = z, 2vdv = dz$

$$\int \frac{1}{\tan(u)^2+1}\sec(u)^2 du - \int \frac{\frac{1}{2}}{z}dz = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\int \frac{1}{\sec(u)^2}\sec(u)^2 du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\int du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$u - \frac{1}{2}\ln|z| = \ln|x| + C$$
$$\arctan(v) - \frac{1}{2}\ln(v^2+1) = \ln|x| + C$$
$$\therefore \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = \ln|x| + C$$

d) Ecuaciones Bernoulli:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq \{0,1\}$$
$$v = y^{1-n} \rightarrow y = v^{1/(1-n)}$$
$$y' = \frac{1}{1-n}v^{(\frac{1}{1-n}-1)}v' = \frac{1}{1-n}v^{\frac{n}{1-n}}v'$$
$$\frac{1}{1-n}v^{\frac{n}{1-n}}v' + p(x)v^{\frac{1}{1-n}} = q(x)v^{\frac{n}{1-n}}$$
$$v' + (1-n)p(x)v^{\frac{1}{1-n}-\frac{n}{1-n}} = (1-n)q(x)v^{\frac{n}{1-n}-\frac{n}{1-n}}$$

$$\rightarrow v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x) \quad \textbf{¡Ecuación lineal!}$$

Ejemplo: $y' = y(xy^3 - 1)$

Solución:

$$y' = y(xy^3 - 1) \rightarrow y' = xy^4 - y$$
$$y' + y = xy^4$$

Hacemos la sustitución: $v = y^{1-4} = y^{-3} \rightarrow y = v^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}v^{-\frac{4}{3}}v'$

$$-\frac{1}{3}v^{-\frac{4}{3}}v' + v^{-\frac{1}{3}} = xv^{-\frac{4}{3}}$$
$$v' - 3v = -3x \,\backslash\, \cdot e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

$$\frac{d}{dx}(ve^{-3x}) = -3xe^{-3x}$$
$$ve^{-3x} = -3\int xe^{-3x}dx + C$$

Separamos: $u = x, du = dx, ds = e^{-3x}dx, s = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$ve^{-3x} = -3\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}dx\right) + C$$
$$ve^{-3x} = -3\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{-3x}\right) + C$$
$$ve^{-3x} = \left(xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right) + C$$
$$v = \left(x + \frac{1}{3}\right) + Ce^{3x}$$
$$y^{-3} = \left(x + \frac{1}{3}\right) + Ce^{3x}$$
$$\therefore y = \left(x + \frac{1}{3} + Ce^{3x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

e) Ecuaciones exactas:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad M(x,y) = F_x(x,y), \qquad N(x,y) = F_y(x,y)$$
$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

$$(1)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y) = M(x,y)$$
$$(2)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y) = N(x,y)$$
$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y)$$

Ejemplo: $\left(3x^2e^{x^3} + 5x^4y^4\right)dx + (1 + 4x^5y^3)dy = 0$

Solución:

Verificamos que sea exacta:

$$M = 3x^2e^{x^3} + 5x^4y^4 \rightarrow M_y = 20x^4y^3$$
$$N = 1 + 4x^5y^3 \rightarrow N_x = 20x^4y^3$$
$$M_y = N_x$$

$$(1)\ F_x = M = 3x^2e^{x^3} + 5x^4y^4$$
$$(2)\ F_y = N = 1 + 4x^5y^3$$

Integramos parcial (1): $F(x,y) = \int 3x^2e^{x^3}dx + \int 5x^4y^4dx + h(y)$
Para la primera integral hacemos la sustitución: $x^3 = u, 3x^2dx = du$

$$F(x,y) = \int e^u du + \int 5x^4y^4 dx + h(y)$$
$$F(x,y) = e^u + x^5y^4 + h(y)$$
$$F(x,y) = e^{x^3} + x^5y^4 + h(y) \backslash \ \frac{\partial}{\partial y}$$
$$F_y = 4x^5y^3 + h(y)'$$

Igualamos con (2): $F_y = 4x^5y^3 + h(y)' = 1 + 4x^5y^3 \rightarrow h(y)' = 1$

$$h(y) = y + C$$

$$\therefore F(x,y) = e^{x^3} + x^5y^4 + y = K$$

f) Factores integrantes:

$$[uM(x,y)]dx + [uN(x,y)]dy = 0$$

$$[uM(x,y)]_y = \ [uN(x,y)]_x$$

Si suponemos que $u = u(x)$

$$uM_y(x,y) = \ u_xN(x,y) + \ uN_x(x,y)$$

$$u_x = u\frac{\left[M_y(x,y) - \ N_x(x,y)\right]}{N(x,y)}$$

Ejemplo: $dx + \left(\frac{x}{y} - sen(y)\right)dy = 0$ con $u = u(y)$

Solución:

Verificamos que no es exacta:

$$M = 1 \rightarrow M_y = 0$$
$$N = \frac{x}{y} - sen(y) \rightarrow N_x = \frac{1}{y}$$
$$M_y \neq N_x$$

Multiplicamos por $u = u(y)$:

$$u(y)dx + u(y)\left(\frac{x}{y} - sen(y)\right)dy = 0$$

Como queremos que la ecuación sea exacta exigimos que:

$$(u(y))_y = \left(u(y)\left(\frac{x}{y} - sen(y)\right)\right)_x$$
$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln|u| = \ln|y| \rightarrow u = Ay$$

Elegimos $A = 1 \rightarrow u = y$:

$$ydx + y\left(\frac{x}{y} - sen(y)\right)dy = 0$$
$$ydx + (x - ysen(y))dy = 0$$

$$(1)\ F_x = M = y$$
$$(2)\ F_y = N = x - ysen(y)$$

Integramos parcial (1): $F(x,y) = xy + h(y) \backslash \ \frac{\partial}{\partial y}$
$$F_y = x + h(y)'$$

Igualamos con (2): $F_y = x + h(y)' = x - ysen(y) \rightarrow h(y)' = -ysen(y)$
$$h(y) = -\int ysen(y)dy + C$$

Separamos: $u = y, du = dy, dv = sen(y)dy, v = -\cos(y)$

$$h(y) = -\left(-ycos(y) - \int -\cos(y)dy\right) + C$$
$$h(y) = ycos(y) - sen(y) + C$$
$$\therefore F(x,y) = xy + ycos(y) - sen(y) = K$$

g) <u>Forma $y' = f(ax + by + c)$</u>:

$$y' = f(ax + by + c)$$
$$u = ax + by + c \rightarrow u' = a + by' \rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$
$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$
$$u' = bf(u) + a$$
$$\frac{du}{bf(u) + a} = dx \quad Ecuación\ separable$$

Ejemplo: $y' = (-5x + y)^2 - 4$

Solución:

$$y' = (-5x + y)^2 - 4$$

Sustituimos: $u = -5x + y \rightarrow u' = -5 + y' \rightarrow y' = u' + 5$
$$u' + 5 = u^2 - 4$$
$$u' = u^2 - 9$$
$\frac{du}{u^2 - 9} = dx \rightarrow$ Soluciones especiales: $u = 3$ y $u = -3$, es decir, $y = 5x + 3$ e $y = 5x - 3$
$$\int \frac{du}{u^2 - 9} = \int dx + C$$

La primera integral conviene trabajarla con fracciones parciales:

$$\frac{1}{u^2-9}=\frac{1}{(u+3)(u-3)}=\frac{A}{u+3}+\frac{B}{u-3}=\frac{Au-3A+Bu+3B}{(u+3)(u-3)}$$

Buscamos que: $A+B=0, -3A+3B=1 \rightarrow B=-A \rightarrow -3A-3A=1 \rightarrow -6A=1$

$$A=-\frac{1}{6}$$
$$B=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{u^2-9}=\frac{-\frac{1}{6}}{u+3}+\frac{\frac{1}{6}}{u-3}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u+3}\right)$$
$$\int\frac{du}{u^2-9}=\int dx+C \leftrightarrow \int\frac{1}{6}\left(\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u+3}\right)du=\int dx+C$$
$$\left(\int\frac{du}{u-3}-\int\frac{du}{u+3}\right)=6\left(\int dx+C\right)$$
$$(\ln|u-3|-\ln|u+3|)=6x+6C$$
$$\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|=6x+6C$$
$$\left|\frac{u-3}{u+3}\right|=Ae^{6x} \rightarrow \frac{u-3}{u+3}=Ae^{6x}$$
$$u-3=Ae^{6x}u+3Ae^{6x}$$
$$u(1-Ae^{6x})=3(Ae^{6x}+1)$$
$$u=\frac{3(1+Ae^{6x})}{1-Ae^{6x}},\ Ae^{6x}\neq 1$$
$$u=\frac{3(1+Ae^{6x})}{1-Ae^{6x}}$$
$$-5x+y=\frac{3(1+Ae^{6x})}{1-Ae^{6x}}$$
$$\therefore y=\frac{3(1+Ae^{6x})}{1-Ae^{6x}}+5x$$

Con $A=0$ rescatamos la solución especial $y=3+5x$

<u>Modelos</u>:

<u>Modelo exponencial</u>: $y'=ky,\ y=cantidad\ de\ población,\ k=tasa\ de\ crecimiento$

<u>Modelo logístico</u>: $y'=ky\left(1-\frac{y}{M}\right),\ y=cantidad\ de\ población,\ k=tasa\ de\ crecimiento,$
$M=cantidad\ máxima\ de\ población\ sustentable$

<u>Modelo de Newton de Enfriamiento</u>: $T'=k(A-T),\quad T=t°,\quad A=t°\ ambiente,$
$k=tasa\ de\ cambio$

Ejercicios

1) **(Homogénea, Separables) Resuelva la ecuación:**

$$\boldsymbol{y' = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}}$$

Ayuda: realice las sustituciones $x = X - a,\ y = Y - b$ y elija las constantes a, b de modo que la ecuación sea homogénea en las variables X, Y.

Solución:

Notamos que en la ecuación, las contantes 5 y 4 son las que nos impiden realizar el método homogéneo. Luego, elegimos una sustitución de manera de eliminar esos términos constantes.

$$\begin{gathered} x = X - a \\ y = Y - b \\ y' = Y' \end{gathered}$$

Reemplazando en la ecuación nos queda:

$$Y' = \frac{2(Y - b) - (X - a) + 5}{2(X - a) - (Y - b) - 4}$$

Reagrupando nos queda:

$$Y' = \frac{2Y - X + (-2b + a + 5)}{2X - Y + (-2a + b - 4)}$$

Como queremos llegar a una ecuación homogénea en las variables X, Y hacemos cada paréntesis igual a cero y nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{gathered} a - 2b = -5 \\ 2a - b = -4 \end{gathered}$$

Resolviendo llegamos a que: $a = -1,\ b = 2$, es decir, $X = x - 1,\ Y = y + 2$. Por construcción nos queda:

$$Y' = \frac{2Y - X}{2X - Y} \cdot \frac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}},\ \ X \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$Y' = \frac{2\frac{Y}{X} - 1}{2 - \frac{Y}{X}}$$

Hacemos la sustitución: $v = \frac{Y}{X} \rightarrow Y = vX \rightarrow Y' = v'X + v$

$$v'X + v = \frac{2v - 1}{2 - v}$$

$$\frac{dv}{dX}X = \frac{2v-1}{2-v} - v = \frac{2v-1-2v+v^2}{2-v} = \frac{v^2-1}{2-v}$$

$\frac{2-v}{v^2-1}dv = \frac{dX}{X} \rightarrow$ Soluciones especiales: $v = 1, v = -1$, es decir, $Y = X, Y = -X$. Reemplazando obtenemos las dos soluciones especiales:

$$y + 2 = x - 1 \rightarrow y = x - 3$$
$$y + 2 = -x + 1 \rightarrow y = -x - 1$$

Continuando tenemos que:

$$\int \frac{2-v}{v^2-1}dv = \int \frac{dX}{X} + C$$

Usaremos fracciones parciales para la primera integral:

$$\frac{2-v}{v^2-1} = \frac{2-v}{(v-1)(v+1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} = \frac{Av + A + Bv - B}{(v-1)(v+1)}$$

Llegamos al siguiente sistema:

$$A + B = -1$$
$$A - B = 2$$

Luego: $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{2}$. Es decir:

$$\frac{2-v}{v^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{v-1} + -\frac{3}{2}\frac{1}{v+1}$$

Luego:

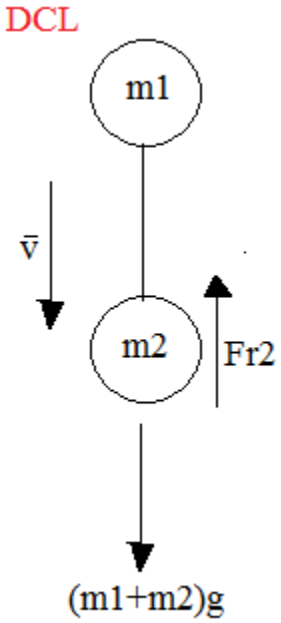
$$\int \frac{2-v}{v^2-1}dv = \int \frac{dX}{X} + C \leftrightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{v-1} - \frac{\frac{3}{2}}{v+1}\right)dv = \int \frac{dX}{X} + C$$
$$\frac{1}{2}\ln|v-1| - \frac{3}{2}\ln|v+1| = \ln|X| + C$$
$$|v-1|^{\frac{1}{2}}|v+1|^{-\frac{3}{2}} = A|X| \setminus ()^2$$
$$|v-1||v+1|^{-3} = A|X|^2$$
$$|v-1| = AX^2|v+1|^3$$
$$v - 1 = AX^2(v+1)^3$$
$$\frac{Y}{X} - 1 = AX^2\left(\frac{Y}{X} + 1\right)^3$$
$$\frac{y+2}{x-1} - 1 = A(x-1)^2\left(\frac{y+2}{x-1} + 1\right)^3$$
$$\therefore y - x + 3 = A(y + x + 1)^3$$

2) **Una persona cae con un paracaídas. El aire ejerce una fuerza de roce $\boldsymbol{F = \gamma v}$. Suponiendo que el tipo y su paracaídas pueden ser representados como 2 partículas de masa $\boldsymbol{m_1}$ (paracaídas) y $\boldsymbol{m_2}$ (persona). Los coeficientes son $\boldsymbol{\gamma_1}$ y $\boldsymbol{\gamma_2}$ respectivamente. Si el movimiento es vertical:**

a) **Determinar la velocidad límite de la persona antes que se abra el paracaídas, si se lanza desde el reposo.**
b) **Luego de haber alcanzado la velocidad estacionaria el paracaídas es abierto. Determinar cuánto vale la velocidad en función del tiempo.**

Solución:

a) Como el paracaídas está cerrado sólo hay fuerza de roce sobre la persona:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$Fr_2 - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

Donde $Fr_2 = -\gamma_2 v$ y $a = \frac{dv}{dt}$

Luego:

$$-\gamma_2 v - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_2}{m_1 + m_2}v = -g \;\backslash\; e^{\int \frac{\gamma_2}{m_1+m_2}dt} = e^{\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$
$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}\right) = -ge^{\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$
$$ve^{\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t} = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2}e^{\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t} + C$$

$$v(t) = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2} + Ce^{-\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$

Como se lanza del reposo: $V(0) = 0$

$$V(0) = 0 = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2} + C \rightarrow C = g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2}$$
$$\therefore v(t) = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2}\left(1 - e^{-\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}\right)$$

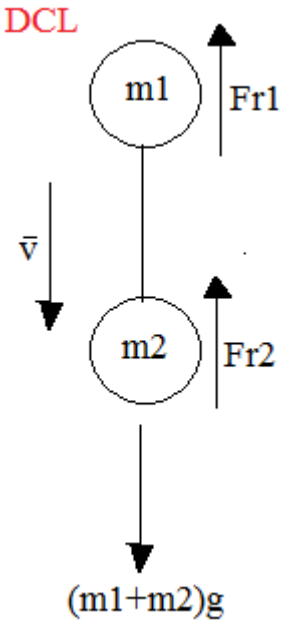
Para calcular la velocidad límite que alcanza la persona debemos hacer $t \rightarrow \infty$:

$$v(t \rightarrow \infty) = v_{lim} = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2}\left(1 - e^{-\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}\infty}\right)$$
$$\therefore v_{lim} = -g\frac{m_1 + m_2}{\gamma_2}$$

Es negativa ya que habíamos supuesto que la velocidad positiva era hacia arriba.

b) La velocidad estacionaria equivale a la velocidad límite y como el paracaídas se abre cuando se alcanza esta velocidad cambiamos el eje de referencia temporal y hacemos

$v(0) = v_{lim} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_2}$. Ahora existe fuerza de roce sobre la persona y sobre el paracaídas:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$Fr_1 + Fr_2 - (m_1+m_2)g = (m_1+m_2)a$$

Donde $Fr_1 = -\gamma_1 v,\ Fr_2 = -\gamma_2 v$ y $a = \frac{dv}{dt}$

Luego:

$$-\gamma_1 v - \gamma_2 v \ -(m_1+m_2)g = (m_1+m_2)\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}v = -g \ \backslash\ e^{\int \frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}dt} = e^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$
$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t}\right) = -ge^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$
$$ve^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2}e^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t} + C$$

$$v(t) = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2} + Ce^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{m_1+m_2}t}$$

Como $v(0) = v_{lim} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_2}$:

$$v(0) = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_2} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2} + C \rightarrow C = g(m_1+m_2)\left(\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2}\right)$$
$$C = g(m_1+m_2)\frac{-\gamma_1}{\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)}$$
$$\therefore v(t) = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2}\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}e^{-\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}t}\right)$$

Para calcular la velocidad límite que alcanza la persona con el paracaídas debemos hacer $t \rightarrow \infty$:

$$v(t\rightarrow\infty) = v_{lim} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2}\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}e^{-\frac{\gamma_2}{m_1+m_2}\infty}\right)$$
$$\therefore v_{lim} = -g\frac{m_1+m_2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

Es negativa ya que habíamos supuesto que la velocidad positiva era hacia arriba y es menor en módulo a la anterior, es decir, con el paracaídas caemos más lentamente que sin él.

3) **Se considera una esfera de hielo que se derrite a razón proporcional al área de su superficie. Hallar una expresión para el volumen de la esfera en función del tiempo sabiendo que: $V(0) = 27m^3$, $V(1) = \frac{1}{27}m^3$.**

Solución:

Definimos:

$V(t)$: Volumen de la esfera de hielo en un tiempo t.
$r(t)$: Radio de la esfera de hielo en un tiempo t.
k: Constante de proporcionalidad.

Sabemos que el área de una esfera viene dada por la expresión: $A = 4\pi r^2$. Luego, para este ejercicio, el área es variable y varía según:

$$(1)\ A(t) = 4\pi r(t)^2$$

Por otro lado el volumen de la esfera viene dado por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Luego, para este ejercicio, el volumen es variable y varía según:

$$(2)\ V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$$

Por enunciado nos dicen que:

$$(3)\ \frac{dV(t)}{dt} = kA(t)$$
$$(4)\ \frac{dV(t)}{dt} = k4\pi r(t)^2$$

De (2) despejamos $r(t)$:

$$r(t) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} V(t)^{\frac{1}{3}}$$

Reemplazamos en (4) y nos queda:

$$\frac{dV(t)}{dt} = k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} V(t)^{\frac{2}{3}}$$

Llegamos a una ecuación separable:

$$V^{-\frac{2}{3}}dV = k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} dt$$
$$\int V^{-\frac{2}{3}}dV = \int k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} dt + C$$

$$3V^{\frac{1}{3}} = k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}t + C$$

$$V(t) = \left(\frac{k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}t + C}{3}\right)^3$$

$$V(0) = 27 = 3^3 = \left(\frac{C}{3}\right)^3 \rightarrow C = 9$$

$$V(1) = \frac{1}{27} = 3^{-3} = \left(\frac{k4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + 9}{3}\right)^3 \rightarrow k = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Reemplazando:

$$\therefore V(t) = \left(\frac{-8t + 9}{3}\right)^3$$

Ayudantía 5

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
12 de Abril, 2010

Resumen

Existencia y Unicidad

Existencia: Dado el PVI $y' = f(x,y)$ continuo en el rectángulo R: $a < x < b, c < y < d$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$, se asegura la existencia de una o más soluciones cuando se cumple que: $a < x_0 < b, c < y_0 < d$. La o las soluciones tendrán intervalo solución de la forma $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in (a,b)$ (ε puede ser muy pequeño o muy grande). Si $(x_0, y_0) \notin R$ no podemos asegurar nada, puede haber solución o no.

Unicidad: Habiendo existencia de solución, dado el PVI $y' = f(x,y)$ continuo en el rectángulo R: $a < x < b, c < y < d$ y condición inicial $y(x_0) = y_0$. Si $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ es continuo en el rectángulo R: $a < x < b, c < y < d$, se asegura solución única cuando $a < x_0 < b, c < y_0 < d$. La solución tendrá intervalo solución de la forma $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in (a,b)$ (ε puede ser muy pequeño o muy grande). Si $(x_0, y_0) \notin R$ no podemos asegurar nada, puede haber solución única o varias soluciones.

Ecuaciones autónomas

- Son de la forma $y' = f(y)$
- Los **puntos de equilibrio** satisfacen $f(y_0) = 0$
- Si: $f'(y_0) < 0 \rightarrow y_0$ es sumidero
  $f'(y_0) > 0 \rightarrow y_0$ es fuente
  $f'(y_0) = 0 \rightarrow$ se necesita más información

Bifurcaciones

Para que un punto de equilibrio $y = y_0$ de $y' = f(y, \alpha)$ tenga una bifurcación en $\alpha = \alpha_0$ debe cumplirse que:

$$f(y_0, \alpha_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, \alpha_0) = 0$$

Ejercicios:

1) **Dado el siguiente PVI:**

$$\boldsymbol{y' = \frac{ln(y)}{x}, \qquad y(a) = b}$$

Determine los valores de a y b para que exista solución local única.

Solución: Analizamos primero la existencia. Tenemos que:

$$f(x,y) = \frac{ln(y)}{x}$$

Luego el dominio de $f(x,y)$ es $R_1: \{(x,y) \in R^2 | x \neq 0, y > 0\}$. Luego, los valores de a y b que nos aseguran existencia de solución son:

$$a \neq 0, \qquad b > 0$$

Ahora analizamos la unicidad. Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy}$$

Luego el dominio de $f_y(x,y)$ es $R_2: \{(x,y) \in R^2 | x \neq 0, y \neq 0\}$. Para que exista unicidad debe cumplirse simultáneamente R_1 y R_2, es decir:

$$a \neq 0, b > 0, a \neq 0, b \neq 0 \rightarrow a \neq 0, b > 0$$

Dada las condiciones anteriores se asegura existencia y unicidad al PVI con intervalo solución en el intervalo solución de f.

2) **Considere el PVI $\boldsymbol{y' = x^2\sqrt{|y|},\ y(a) = b}$**

   a) **Aplique el Teorema de Existencia y Unicidad a este PVI.**
   b) **Resuelva la ecuación diferencial en cada semiplano $\boldsymbol{y > 0, y < 0}$.**

Solución:

a) Tenemos que $f(x,y) = x^2\sqrt{|y|}$ es continua en todo R^2 y es derivable con respecto a y en $R^2 - \{y = 0\}$. Luego, existe solución $\forall (a,b) \in R^2$ y existe solución única para $b \neq 0, \forall a$.

b) En el semiplano $y > 0$:

$$y' = x^2\sqrt{y} \rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C$$

Intervalo de definición: $\frac{x^3}{3} + C \geq 0$

Luego:

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{6} + C\right)^2$$

En el semiplano $y < 0$:

$$y' = x^2\sqrt{-y} \rightarrow \frac{dy}{\sqrt{-y}} = x^2 dx$$

$$-2\sqrt{-y} = \frac{x^3}{3} + C$$

Intervalo de definición: $\frac{x^3}{3} + C < 0$

Luego:

$$y(x) = -\left(\frac{x^3}{6} + C\right)^2$$

3) **Encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio de la siguiente ecuación autónoma:**

$$\boldsymbol{y' = \frac{2^y (y-2)^2 sin(y)}{1 + y^4}}$$

Solución:

Tenemos que $2^y > 0 \; \forall y$ y que $1 + y^4 > 0 \; \forall y$. Luego los puntos de equilibrio están determinados por $(y-2)^2$ y por $sin(y)$ y son $y = 2$ e $y = k\pi, k \in Z$. Alrededor del punto de equilibrio $y = 2$ la función no presenta cambios de signos, es decir, $y = 2$ es un nodo. Por otro lado, $y = k\pi$ presenta cambios de signos constantemente. Si k es par, alrededor de $y = k\pi$ cambiamos de pendiente negativa a positiva por lo que se considera una fuente. Si es impar, alrededor de $y = k\pi$ cambiamos de pendiente positiva a negativa por lo que se considera un sumidero.

4) **Dada la ecuación: $\boldsymbol{y' = y^2 - \alpha y + 1}$. Determine $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ donde ocurre bifurcación.**

Solución:

Para que ocurra bifurcación debe cumplirse que:

$$f(x, \alpha) = 0, \qquad f_y(x, \alpha) = 0$$

Es decir:

$$(1)\; y^2 - \alpha y + 1 = 0$$
$$(2)\; 2y - \alpha = 0$$

De (2): $\alpha = 2y \rightarrow (1) y^2 - 2y^2 + 1 = 0 \rightarrow y = \pm 1$
Para $y = 1 \rightarrow \alpha = 2$
Para $y = -1 \rightarrow \alpha = -2$

Luego se produce bifurcación en los puntos (y, α): $(1,2), (-1,-2)$.

Ayudantías 6 y 7

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
26 de abril, 2010

Resumen

Una ecuación diferencial lineal de orden n es de la siguiente forma:

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}y + a_0(x)y = b(x)$$

Éstas pueden ser **homogéneas** y **NO homogéneas** y a la vez de **coeficientes constantes** y **coeficientes NO constantes**.

- Homogéneas → $b(x) = 0$
- NO Homogéneas → $b(x) \neq 0$
- Coeficientes constantes → $a_0(x)$ ... $a_n(x)$ constantes
- Coeficientes NO constantes → al menos un coeficiente $a_0(x)$ ... $a_n(x)$ dependiente de x

Luego, existen 4 clasificaciones para una ecuación diferencial lineal de orden n:

1) Homogénea de coeficientes constantes
2) No homogénea de coeficientes constantes
3) Homogénea de coeficientes NO constantes
4) NO Homogénea de coeficientes NO constantes

1) Ecuación homogénea de coeficientes constantes

Una ecuación lineal homogénea posee n soluciones linealmente independientes entre sí y la solución homogénea corresponde a la combinación lineal de todas ellas. El método de resolución es mediante el **Operador Diferencial D**.

Método del operador D

Consiste en expresar la derivada por un factor D de la siguiente forma: $\frac{d^n}{dx^n}y \rightarrow D^n y$, dejando la ecuación en términos de éste y factorizar para dejar la ecuación en términos de $(D-\alpha)^k$ y $(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^k$ solamente. Cada uno de estos factores aportan cierto número de soluciones y la solución homogénea corresponde a la combinación lineal de todas ellas. El aporte de soluciones es el siguiente:

- $(D-\alpha)^k$ → aporta k soluciones: $e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x}, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}$
- $(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)$ → aporta $2k$ soluciones:

$$e^{\alpha x}\cos(bx), xe^{\alpha x}\cos(bx), x^2e^{\alpha x}\cos(bx), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(bx)$$
$$e^{\alpha x}\sin(bx), xe^{\alpha x}\sin(bx), x^2e^{\alpha x}\sin(bx), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(bx)$$

Ejemplo 1: $y'' - 7y' + 10y = 0$

Solución: Reemplazamos la derivada por el operador D:

$$y'' - 7y' + 10y = 0 \rightarrow D^2y - 7Dy + 10y = 0$$

Factorizamos por y:

$$(D^2 - 7D + 10)y = 0$$

$$(D - 5)(D - 2)y = 0$$

Una vez que tenemos la ecuación factorizada en términos de D se procede a analizar el aporte de soluciones de cada factor:

- $(D - 5) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{5x}
- $(D - 2) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{2x}

Luego, la solución homogénea corresponde a la combinación lineal de estas soluciones, o sea:

$$y_H = C_1e^{5x} + C_2e^{2x}$$

Ejemplo 2: $y'' + 5y' + 7y = 0$

Solución: Reemplazamos la derivada por el operador D:

$$y'' + 5y' + 7y = 0 \rightarrow D^2y + 5Dy + 7y = 0$$

Factorizamos por y:

$$(D^2 + 5D + 7)y = 0$$

No podemos factorizar más en términos de números reales. Luego observamos el aporte de soluciones:

- $(D^2 + 5D + 7) \rightarrow$ aporta 2 soluciones $\left(a = -\frac{5}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $e^{-\frac{5}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, $e^{-\frac{5}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Luego, la solución homogénea es la combinación lineal de ambas soluciones, es decir:

$$y_H = C_1e^{-\frac{5}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{-\frac{5}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Ejemplo 3: $y'' + 18y' + 81y = 0$

Solución: Reemplazamos la derivada por el operador D:

$$y'' + 18y' + 81y = 0 \rightarrow D^2y + 18Dy + 81y = 0$$

Factorizamos por y:

$$(D^2 + 18D + 81)y = 0$$

$$(D + 9)^2 y = 0$$

Analizamos el aporte de soluciones de este único factor:

- $(D + 9)^2 \rightarrow$ aporta 2 soluciones: $e^{-9x},\ xe^{-9x}$

Luego, la solución homogénea es la combinación lineal de ambas soluciones, es decir:

$$y_H = C_1 e^{-9x} + C_2 x e^{-9x}$$

Ejemplo 4: $y''''''' - 13y''''' + 70y'''' - 214y''' + 401y''' - 461y'' + 296y' - 80y = 0$

Solución: Reemplazamos la derivada por el operador D:

$$D^7 y - 13D^6 y + 70D^5 y - 214D^4 y + 401D^3 y - 461D^2 y + 296Dy - 80y = 0$$

Factorizamos por y:

$$(D^7 - 13D^6 + 70D^5 - 214D^4 + 401D^3 - 461D^2 + 296D - 80)y = 0$$

$$(D - 5)(D - 1)^2 (D^2 - 3D + 4)^2 y = 0$$

Analizamos el aporte de soluciones de cada factor:

- $(D - 5) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{5x}
- $(D - 1)^2 \rightarrow$ aporta 2 soluciones: $e^x,\ xe^x$
- $(D^2 - 3D + 4)^2 \rightarrow$ aporta 4 soluciones $\left(a = \frac{3}{2}, b = \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$:

$$e^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), xe^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), e^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), xe^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

Luego, la solución homogénea es la combinación lineal de las 7 soluciones, es decir:

$$y_H = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 e^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_5 x e^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_6 e^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_7 x e^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

2) <u>Ecuación NO homogénea de coeficientes constantes</u>

La solución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea es de la siguiente manera:

$$y_g = y_H + y_p$$

donde y_H corresponde a la solución homogénea e y_p corresponde a la solución particular. La solución homogénea se encuentra con el método del operador D y la solución particular se encuentra con el método de los **Coeficientes Indeterminados**.

Método de los Coeficientes Indeterminados

Consiste en "aniquilar" el lado derecho de la ecuación $b(x)$ y resolver nuevamente la ecuación diferencial como si fuera homogénea dando como resultado la solución particular. Un ejemplo de "aniquilar" es lo siguiente:

Sabemos que $(D-3)$ aporta la solución e^{3x} ya que $(D-3)e^{3x}=0$. Por lo tanto el **aniquilador** de e^{3x} es $(D-3)$.

Ejemplo 5: $y''-7y'+10y=18x+20sen(3x)$

Solución: Sabemos que la solución general es de la forma $y_g=y_H+y_p$. Calculamos primero la solución homogénea y_H:

$y_H:\ y''-7y'+10y=0$

Del ejemplo 1 sabemos que la solución homogénea es:

$$y_H=C_1e^{5x}+C_2e^{2x}$$

Luego, debemos calcular la solución particular y_p utilizando el método de los coeficientes indeterminados. Buscamos el aniquilador de $b(x)=18x+20sen(3x)$. En este ejemplo, $b(x)$ corresponde a la suma de dos funciones y debemos encontrar el aniquilador de cada una de ellas:

- Aniquilador de $18x \rightarrow\ D^2$
- Aniquilador de $20sen(3x) \rightarrow\ (D^2+9)$

Luego, el aniquilador de $b(x)$ es el producto de los aniquiladores de sus sumandos, o sea, $D^2(D^2+9)$. Por lo tanto, multiplicamos la ecuación diferencial por el aniquilador:

$$D^2(D^2+9)(y''-7y'+10y)=D^2(D^2+9)(18x+20sen(3x))$$

$$D^2(D^2+9)(D-5)(D-2)y=D^2(D^2+9)18x+D^2(D^2+9)20sen(3x)$$

Pero $D^218x=18D^2x=0$ y $(D^2+9)20sen(3x)=20(D^2+9)sen(3x)=0$, es decir, el lado derecho es cero por construcción. Es decir:

$$D^2(D^2+9)(D-5)(D-2)y=0$$

Luego, debemos analizar el aporte de soluciones de cada factor:

- $D^2 \rightarrow$ aporta 2 soluciones: $1,\ x$
- $(D^2+9) \rightarrow$ aporta 2 soluciones: $\cos(3x),\ sen(3x)$
- $(D-5) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{5x}
- $(D-2) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{2x}

Luego, y_p será de la forma:

$$y_p=A+Bx+Ccos(3x)+Dsen(3x)+Ee^{5x}+Fe^{2x}$$

Sin pérdida de generalidad podemos eliminar los términos que ya están en la solución homogénea ya que pueden ser incluidos por medio de las constantes C_1 y C_2. Entonces nos queda:

$$y_p = A + Bx + Ccos(3x) + Dsen(3x)$$

Los coeficientes A, B, C y D son desconocidos y hay que calcularlos (de ahí proviene el nombre del método). Para calcularlos nos valemos de que y_p es solución a la ecuación diferencial y debe cumplirse que $y_p'' - 7y_p' + 10y_p = 18x + 20sen(3x)$, donde:

$y_p' = B - 3Csen(3x) + 3Dcos(3x)$

$y_p'' = -9Ccos(3x) - 9Dsen(3x)$

Reemplazando en la ecuación diferencial nos queda:

$$-9Ccos(3x) - 9Dsen(3x) - 7(B - 3Csen(3x) + 3Dcos(3x)) + 10\big(A + Bx + Ccos(3x) + Dsen(3x)\big) = 18x + 20sen(3x)$$

$$-9Ccos(3x) - 9Dsen(3x) - 7B - 21Csen(3x) + 21Dcos(3x) + 10A + 10Bx + 10Ccos(3x) + 10Dsen(3x) = 18x + 20sen(3x)$$

Igualamos coeficientes:

- Coeficiente de x: $10B = 18$
- Coeficiente de $cos(3x)$: $-9C + 21D + 10C = 0$
- Coeficiente de $sen(3x)$: $-9D - 21C + 10D = 20$
- Término libre: $-7B + 10A = 0$

Resolviendo el sistema obtenemos que $A = \frac{63}{50}, B = \frac{9}{5}, C = -\frac{210}{221}, D = \frac{10}{221}$. Luego:

$$y_p = \frac{63}{50} + \frac{9}{5}x - \frac{210}{221}cos(3x) + \frac{10}{221}sen(3x)$$

Finalmente, $y_g = y_H + y_p$:

$$y_g = C_1e^{5x} + C_2e^{2x} + \frac{63}{50} + \frac{9}{5}x - \frac{210}{221}cos(3x) + \frac{10}{221}sen(3x)$$

Ejemplo 6: $y'' - y' - 2y = x^2 + e^{-x}$

Solución: Sabemos que la solución general es de la forma $y_g = y_H + y_p$. Calculamos primero la solución homogénea y_H mediante el Operador D:

y_H: $y'' - y' - 2y = 0 \rightarrow (D^2 - D - 2)y = 0 \rightarrow (D + 1)(D - 2)y = 0$

- $(D + 1) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{-x}
- $(D - 2) \rightarrow$ aporta una solución: e^{2x}

Luego:

$$y_H = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$$

Ahora falta encontrar y_p mediante los Coeficientes Indeterminados. Buscamos el aniquilador de $b(x) = x^2 + e^{-x}$.

- Aniquilador de $x^2 \rightarrow D^3$
- Aniquilador de $e^{-x} \rightarrow (D+1)$

Multiplicamos la ecuación por el aniquilador de $b(x)$, es decir, por $D^3(D+1)$:

$$D^3(D+1)(y'' - y' - 2y) = D^3(D+1)(x^2 + e^{-x})$$

$$D^3(D+1)(D+1)(D-2)y = D^3(D+1)(x^2 + e^{-x})$$

$$D^3(D+1)^2(D-2)y = D^3(D+1)(x^2 + e^{-x})$$

Por construcción, el lado derecho es cero y nos queda:

$$D^3(D+1)^2(D-2)y = 0$$

Procedemos a analizar el aporte de soluciones:

- $D^3 \rightarrow$ aporta 3 soluciones: $1,\ x,\ x^2$
- $(D+1)^2 \rightarrow$ aporta 2 soluciones: $e^{-x},\ xe^{-x}$
- $(D-2) \rightarrow$ aporta 1 solución: e^{2x}

Sin pérdida de generalidad podemos eliminar los términos que ya están en la solución homogénea ya que pueden ser incluidos por medio de las constantes C_1 y C_2. Luego, y_p es de la forma:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dxe^{-x}$$

Debemos encontrar los valores de A, B, C y D mediante el método de los Coeficientes Indeterminados. Sabemos que y_p es solución a la ecuación diferencial y debe cumplirse que $y_p'' - y_p' - 2y_p = x^2 + e^{-x}$, donde:

$$y_p' = B + 2Cx + De^{-x} - Dxe^{-x}$$

$$y_p'' = 2C - De^{-x} - De^{-x} + Dxe^{-x} = 2C - 2De^{-x} + Dxe^{-x}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$2C - 2De^{-x} + Dxe^{-x} - (B + 2Cx + De^{-x} - Dxe^{-x}) - 2(A + Bx + Cx^2 + Dxe^{-x}) = x^2 + e^{-x}$$

$$2C - 2De^{-x} + Dxe^{-x} - B - 2Cx - De^{-x} + Dxe^{-x} - 2A - 2Bx - 2Cx^2 - 2Dxe^{-x} = x^2 + e^{-x}$$

Igualamos coeficientes:

- Coeficiente de x: $-2C - 2B = 0$
- Coeficiente de x^2: $-2C = 1$
- Coeficiente de e^{-x}: $-2D - D = 1$
- Coeficiente de xe^{-x}: $D + D - 2D = 0$

- Término libre: $2C - B - 2A = 0$

Resolviendo el sistema obtenemos que $A = -\frac{3}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -\frac{1}{3}$. Luego:

$$y_p = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xe^{-x}$$

Finalmente, $y_g = y_H + y_p$:

$$y_g = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xe^{-x}$$

Resumen I3

Pablo Sáez
pfsaez@uc.cl
15/06/2010

Sistemas de ecuaciones $x' = Ax$

a) Caso 2x2

i.- Diagonalizable

La solución es de la forma:

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde λ_1 y λ_2 corresponden a los **valores propios** de la matriz A y v_1 y v_2 corresponden a los **vectores propios** de la matriz A.

Ejemplo: *Resuelva* $x' = -5x + 2y, y' = -6x + 2y$

Escribimos el sistema de la forma $x' = Ax$, donde:

$$x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-5-\lambda)(2-\lambda) - (-6)(2) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Resolviendo obtenemos que los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. Ahora debemos calcular v_1 y v_2.

- Para $\lambda_1 = -1$: $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Se debe cumplir que $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$, es decir:

  $$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

  Dividiendo arriba por -2 y abajo por -3 obtenemos que:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Esto implica que $2a - b = 0 \rightarrow b = 2a$. Reemplazando en $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ obtenemos que:

  $$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Elegimos cualquier valor para a $(a = 1)$ y tenemos que: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Para $\lambda_2 = -2$: $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Se debe cumplir que $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$, es decir:

  $$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Dividiendo abajo por 2 obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Esto implica que $-3a + 2b = 0 \rightarrow b = \frac{3}{2}a$. Reemplazando en $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 3/2\, a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Elegimos cualquier valor para a $(a = 2)$ y tenemos que: $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Finalmente, reemplazando λ_1, λ_2, v_1 y v_2 obtenemos que:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Es decir:

$$x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t}$$

$$y = 2C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-2t}$$

ii.- No Diagonalizable (valor propio repetido)

La solución es de la forma:

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda t} + C_2 (v_2 + t v_1) e^{\lambda t}$$

Donde λ corresponde al **valor propio** de la matriz A, v_1 al respectivo **vector propio** de la matriz A y v_2 al **vector propio generalizado** a partir de v_1.

Ejemplo: *Resuelva* $x' = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} x$

Calculamos los valores propios de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -9 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-4 - \lambda)(8 - \lambda) - (-9)(4) = 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Resolviendo obtenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$, es decir, $\lambda = 2$. El vector propio es de la forma $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y satisface $(A - \lambda I)v_1 = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Dividiendo arriba por -2 y abajo por -3 obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Esto implica que $3a - 2b = 0 \rightarrow b = \frac{3}{2}a$. Reemplazando en $v_1 = \binom{a}{b}$ obtenemos que:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 3/2\, a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Elegimos cualquier valor para a $(a = 2)$ y tenemos que: $v_1 = \binom{2}{3}$. El vector generalizado v_2 debe satisfacer $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ y no debe pertenecer al Ker de $A - \lambda I$. Hacemos $v_2 = \binom{a}{b}$ y debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\binom{a}{b} = \binom{2}{3} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Dividiendo arriba por -2 y abajo por -3 obtenemos que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto implica que $3a - 2b = -1 \rightarrow 2b = 3a + 1 \rightarrow b = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$. Reemplazando en $v_2 = \binom{a}{b}$ obtenemos que:

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Elegimos $a = 1$ y obtenemos que $v_2 = \binom{1}{2}$. Luego $v_2 = \binom{1}{2}$ es un vector generalizado. Finalmente, reemplazando λ, v_1 y v_2 obtenemos que:

$$x(t) = C_1\binom{2}{3}e^{2t} + C_2\left(\binom{1}{2} + t\binom{2}{3}\right)e^{2t}$$

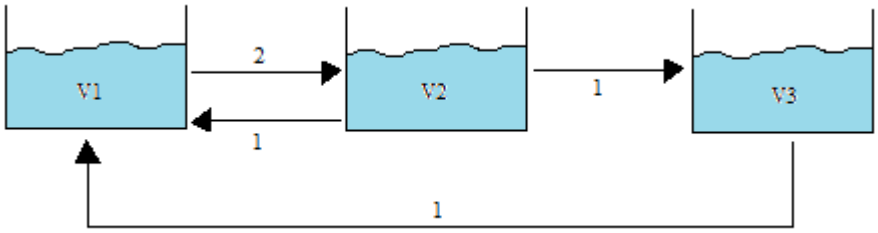
b) Caso nxn, n>2 diagonalizable

La solución es de la forma:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i v_i e^{\lambda_i}$$

Donde λ_i corresponden a los **valores propios** de la matriz A y v_i corresponden a los **vectores propios** de la matriz A.

Ejemplo práctico: Considere el sistema de 3 estanques, con flujos de cierta solución (litros/segundos) entre ellos, como en la figura siguiente:



Donde $x_i(t)$ denota la cantidad de Kgs. de soluto en el estanque i-ésimo en el instante t. Si el volumen de la solución en $t = 0$ en los estanque 1, 2, 3 es de 1, 1, ½ m^3 respectivamente, demuestre que independientemente de la cantidad inicial de soluto en los estanques, se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x_1(t)}{x_3(t)} = 2$$

Solución: Debemos encontrar una expresión para la cantidad de soluto (masa) $x_i(t)$ para cada estanque, es decir, un sistema de ecuaciones lineal del tipo $x' = Ax$. Notamos que los flujos de salida y entrada para cada estanque son iguales, es decir, el volumen en cada estanque permanece constante. Sabemos que:

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = (masa\ que\ entra\ al\ estanque\ i) - (masa\ que\ sale\ del\ estanque\ i)$$

Por otro lado sabemos que la densidad, la masa y el volumen se relacionan según la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{x}{V} \to x = \rho V \to x' = \rho V' \to x' = \frac{x}{V}V'$$

Es decir, el flujo de masa de un estanque i a un estanque j corresponde a la masa de soluto del estanque i por el flujo volumétrico del estanque i al j dividido por el volumen del estanque i. Luego, el sistema de ecuaciones corresponde a:

$$x_1' = -\frac{2}{1}x_1 + \frac{1}{1}x_2 + \frac{1}{1/2}x_3$$

$$x_2' = \frac{2}{1}x_1 - \frac{2}{1}x_2$$

$$x_3' = +\frac{1}{1}x_2 - \frac{1}{1/2}x_3$$

Matricialmente,

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios resolviendo $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 10) = 0$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 + i\,, \lambda_3 = -3 - i$

- Para $\lambda_1 = 0,\ Ker(A - \lambda_1 I) = Ker(A - 0 \cdot I) = Ker(A) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Para $\lambda_2 = -3 + i\,, Ker(A - \lambda_2 I) = Ker(A - (-3 + i) \cdot I) = \langle \begin{pmatrix} -i \\ -1 + i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

  $$\rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Para $\lambda_3 = -3 - i,\ Ker(A - \lambda_3 I) = Ker(A - (-3 - i) \cdot I) = \langle \begin{pmatrix} i \\ -1 - i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

  $$\rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Notar que $v_3 = \overline{v_2}$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -i \\ -1 + i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-3+i)t} + C_1 \begin{pmatrix} i \\ -1 - i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-3-i)t}$$

Como la parte real de los valores propios complejos es negativa, tomando límite cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 2C_1 \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 2C_1 \quad \lim_{t\to\infty} x_3(t) = C_1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{2C_1}{2C_1} = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x_1(t)}{x_3(t)} = \frac{2C_1}{C_1} = 2$$

Sistemas de ecuaciones $x'' = Ax$

Se resuelve haciendo el cambio de variable $x = Vy$, con V matriz de vectores propios. Luego reemplazamos y nos queda que $V\,y'' = AVy \rightarrow y'' = V^{-1}AVy \rightarrow y'' = Dy$, con D matriz diagonal cuya diagonal corresponde a los valores propios de A. Es decir:

$$\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \vdots \\ y_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow y_i'' = \lambda_i y_i, i = 1..n$$

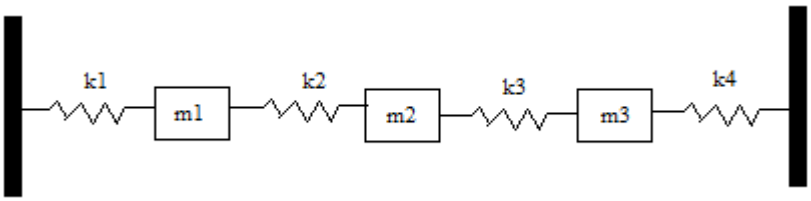
Caso 1: $\lambda_i = 0 \rightarrow y_i = C_i t + D_i$

Caso 2: $\lambda_i < 0 \rightarrow y_i = C_i \cos(\omega_i t) + D_i sen(\omega_i t),\ \ \omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$

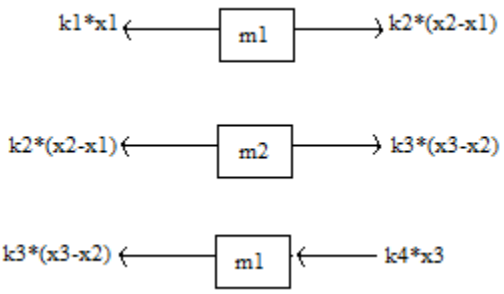
Caso 3: $\lambda_i > 0 \rightarrow y_i = C_i e^{v_i t} + D_i e^{-v_i t},\ \ v_i = \sqrt{\lambda_i}$

Finalmente, $x = Vy = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n$

Ejemplo: Sistemas de masa resorte con $x_i(t)$ posición de la masa con respecto a su posición de equilibrio.



Los diagramas de cuerpo libre para cada bloque corresponden a:



Luego, el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$m_1 x_1'' = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1$$

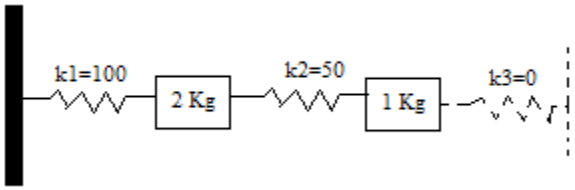
$$m_2 x_2'' = k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_3 x_3'' = -k_3(x_3 - x_2) - k_4 x_3$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} x'' = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) \end{pmatrix} x$$

Si el problema fuera el siguiente:



Tendríamos que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'' = \begin{pmatrix} -150 & 50 \\ 50 & -50 \end{pmatrix} x \rightarrow x'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -150 & 50 \\ 50 & -50 \end{pmatrix} x$$

$$x'' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de A:

$$\begin{vmatrix} -75-\lambda & 25 \\ 50 & -50-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda+100)(\lambda-25) = 0$$

Los valores propios corresponden a $\lambda_1 = -100$ y $\lambda_2 = -25$. Calculamos los vectores propios:

Para $\lambda_1 = -100 \rightarrow Ker(A-\lambda_1 I) = Ker(A+100I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = -25 \rightarrow Ker(A-\lambda_2 I) = Ker(A+25I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Como $\lambda_i < 0 \rightarrow y_i = C_i \cos(\omega_i t) + D_i sen(\omega_i t), \ \ \omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, es decir:

$$y_1 = C_1 \cos(10t) + D_1 sen(10t)$$

$$y_2 = C_2 \cos(5t) + D_2 sen(5t)$$

Finalmente, $x = Vy$, es decir:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(C_1 \cos(10t) + D_1 sen(10t) \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \left(C_2 \cos(5t) + D_2 sen(5t) \right)$$

Matriz exponencial

La matriz exponencial es de la forma e^{At} y puede calcularse por expansión de Taylor:

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Se cumple que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ (se comprueba derivando término a término). También se cumple que:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}$$

Luego, si la matriz A es diagonalizable, se cumple que $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, con P matriz de vectores propios.

Ejemplo:

a) Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 3A$, entonces:
$e^{At} = I + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)A$

b) Calcule e^{At} si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2 = 3A$

$A^3 = A \cdot A^2 = 3A^2 = 9A$

$A^4 = A \cdot A^3 = 9A^2 = 27A$

$\vdots$

$A^n = 3^{n-1}A, n > 0$

Luego:

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$e^{At} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}At^n}{n!} = I + \frac{1}{3}A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^n t^n}{n!} = I + \frac{1}{3}A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} = I + \frac{1}{3}A\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} - \frac{(3t)^0}{0!}\right)$$

$$e^{At} = I + \frac{1}{3}A\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3t)^n}{n!} - 1\right) = I + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)A$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$

Luego,

$$e^{At} = I + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz fundamental

La matriz fundamental $\Phi(t)$ corresponde a la solución del sistema de ecuaciones $x' = Ax$, es decir, la solución es de la forma $\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c}$. Cada columna de la matriz fundamental es una solución L.I. del sistema $x' = Ax$, es decir:

$\Phi(t) = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots \quad \vec{x}_n]$, con $\vec{x}_i = v_i e^{\lambda_i t}$

Ejemplo: $x' = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}x$

Habíamos encontrado del primer ejemplo que la solución era de la forma:

$x(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$, es decir:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Luego, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} & 3e^{-2t} \end{pmatrix}$. Es decir, la solución corresponde a $\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c}$, con

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} & 3e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

La matriz fundamental y la matriz exponencial se relacionan mediante la siguiente igualdad:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Luego, $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$ también es solución al sistema de ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones $\boldsymbol{x' = Ax + \vec{f}(t)}$

La solución es de la forma:

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{x_h}(t) + \overrightarrow{x_p}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(x)^{-1}\,\vec{f}(x)dx$$

Donde:

$$\overrightarrow{x_h}(t) = \Phi(t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{x_p}(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(x)^{-1}\,\vec{f}(x)dx$$

El valor de t_0 se elige arbitrariamente. Si las condiciones iniciales son del tipo $\vec{x}(a) = b$ conviene elegir $t_0 = a$.

Ejemplo: Resuelva $x' = 3x - y + 4e^{2t},\ \ y' = -x + 3y + 4e^{4t},\ \ x(0) = 1, y(0) = 1$

Solución: Tenemos que:

$x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{x_h}(t)$: Debemos encontrar $\Phi(t)$ resolviendo el sistema homogéneo, es decir: $x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x$.

Los valores propios vienen dados por resolver la ecuación $|A - \lambda I| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

Los valores propios corresponden a $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora debemos encontrar los vectores propios:

Para $\lambda_1 = 2$: $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde se desprende que: $a - b = 0 \rightarrow a = b$

Luego: $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con $a = 1$ tenemos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 4$: $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde se desprende que:

$$-a - b = 0 \rightarrow b = -a$$

Luego: $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Con $a = 1$ tenemos que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix}$$

Luego: $\Phi(t) = [x_1 \quad x_2] \rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}$, es decir:

$$\overrightarrow{x_h}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{x_p}(t)$: Debemos resolver $\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx$. Partimos por invertir la matriz fundamental:

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2e^{6t}} \begin{pmatrix} -e^{4t} & -e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Ahora debemos encontrar $\Phi(x)^{-1} \vec{f}(x)$:

$$\Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ e^{-4x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2x} \\ 4e^{4x} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 + e^{2x} \\ e^{-2x} - 1 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos resolver $\int_{t_0}^{t} \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx$, con $t_0 = 0$ (por las condiciones iniciales):

$$\int_0^t \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx = \int_0^t 2 \begin{pmatrix} 1 + e^{2x} \\ e^{-2x} - 1 \end{pmatrix} dx = 2 \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} e^{2x} \\ -\frac{1}{2} e^{-2x} - x \end{pmatrix}_0^t = 2 \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx = \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\overrightarrow{x_p}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Para encontrar el vector de constantes $\vec{c}$ evaluamos en $t = 0$ y nos queda que:

$$\vec{x}(0) = \Phi(0)\vec{c} + \Phi(0) \int_0^0 \Phi(x)^{-1} \vec{f}(x) dx = \Phi(0)\vec{c}$$

Luego, $\vec{c} = \Phi(0)^{-1} \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Puntos de equilibrio

Para un sistema:

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

Los puntos de equilibrio (x^*, y^*) son aquellos puntos que satisfacen $f(x^*, y^*) = \ g(x^*, y^*) = 0$.

Ejemplo: *Determine los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones no lineal siguiente:*

$$x' = y^2 - 1$$

$$y' = -x$$

Solución: Debe satisfacerse que $y^2 - 1 = -x = 0$ de donde se obtienen los puntos $P_1 = (0,1)$ y $P_2 = (0, -1)$.

Linealización

Se tiene el sistema $\vec{x}' = \vec{F}(x, y)$, donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$. La linealización de un sistema como éste en torno a un punto (x_0, y_0) está dada por:

$\overrightarrow{x_l}' = \vec{F}(x_0, y_0) + J_F(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$, donde $J_F(x_0, y_0)$ es la matriz jacobiana de $\vec{F}$ dada por

$$J_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x} & \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Evaluada en (x_0, y_0). Para el caso de linealización el torno a puntos críticos siempre tendremos que $\vec{F}(x_0, y_0) = 0$.

Ejemplo: *Para cada punto de equilibrio del ejemplo anterior escriba su linealización*

Solución: Tenemos que $\vec{x}' = \vec{F}(x, y)$, con $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ -x \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como estamos linealizando en torno a los puntos de equilibrio tenemos que $\vec{F}(x_0, y_0) = 0$. Luego:

Para $P_1 = (0,1)$:

$$\overrightarrow{x_l}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y-1) \\ -x \end{pmatrix}$$

Para $P_1 = (0,-1)$:

$$\overrightarrow{x_l}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2(y-1) \\ -x \end{pmatrix}$$

Clasificación puntos de equilibrio y estabilidad

Dado el sistema:

$$x' = f(x,y), \qquad x' = \frac{dx}{dt}$$

$$y' = g(x,y) \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

Se dirá que un punto crítico (x^*, y^*) es estable si dada una condición inicial (x_0, y_0) que parte cerca de (x^*, y^*) entonces $(x(t), y(t))$ permanecen cerca de (x^*, y^*) para todo $t > 0$. Si además de ser estable se satisface que $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ el punto se conoce como asintóticamente estable.

Si dividimos ambas ecuaciones nos queda que:

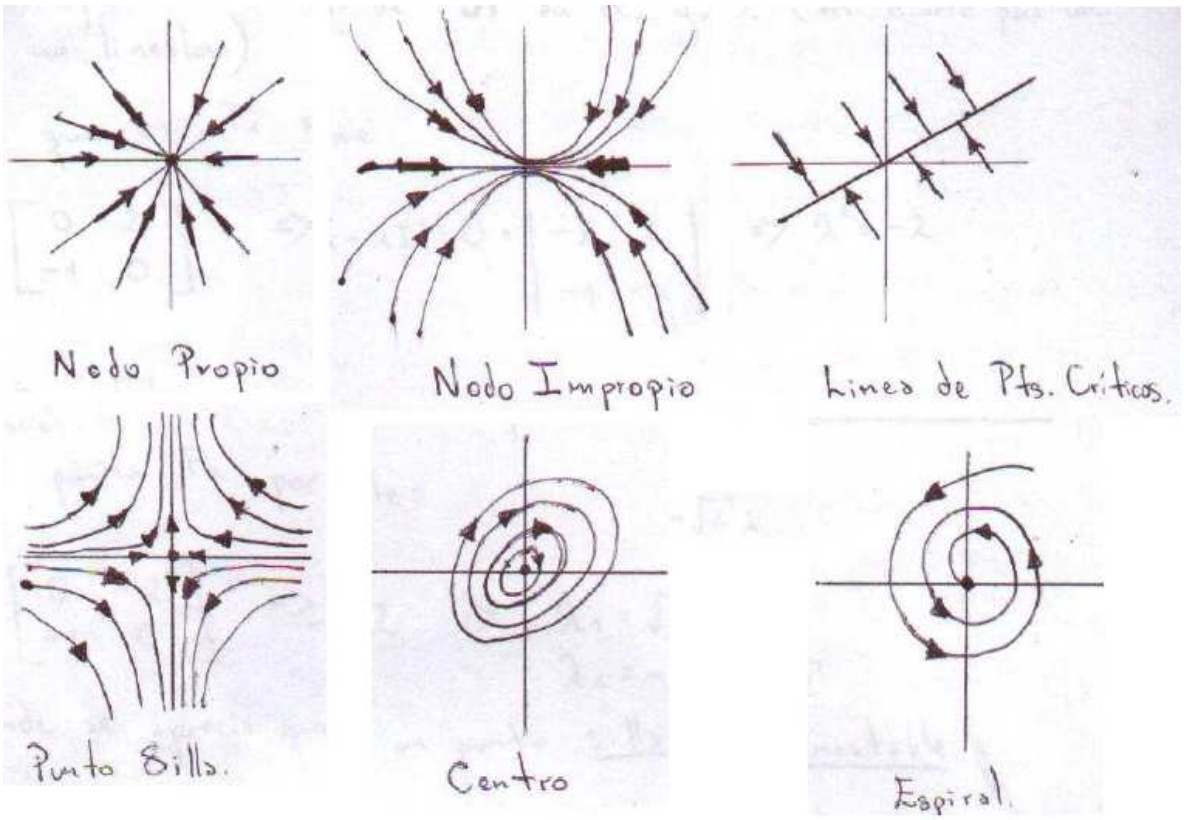
$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

De donde podemos obtener algunas veces $y = y(x)$ pero no siempre es posible. No obstante es posible obtener un bosquejo de los campos de pendiente y campos de direcciones.

Si tenemos un sistema lineal del tipo: $\vec{x}' = A\vec{x}$, los puntos de equilibrio de este sistema de ecuaciones (los $\vec{x}$ que hacen que $\vec{x}' = A\vec{x} = 0$) se clasificarán de acuerdo a los valores propios de la matriz A de la siguiente forma (caso 2x2):

Valores propios	Tipo de Punto de Equilibrio y Estabilidad
Reales, distintos y positivos	Nodo Impropio Inestable
Reales, distintos y negativos	Nodo Impropio Estable
Reales y distinto signo	Punto Silla Inestable
Reales, iguales y positivos	Nodo (Propio o Impropio) o Espiral Inestable
Reales, iguales y negativos	Nodo (Propio o Impropio) o Espiral Estable
Complejos y $Re\{\lambda\} > 0$	Espiral Inestable
Complejos y $Re\{\lambda\} < 0$	Espiral Estable
Complejos y $Re\{\lambda\} = 0$	Centro Estable
Algún $\lambda = 0$	Línea de Puntos Críticos

Tipos de Puntos de Equilibrio (retratos de fase)



Para un sistema no lineal del tipo $\vec{x}' = \vec{F}(x, y)$ podemos linealizar el sistema de modo que: $\overrightarrow{x_l}' = J_F(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$ y podemos encontrar una clasificación de los puntos de equilibrio (x_0, y_0) del sistema linealizado analizando los valores propios de la matriz jacobiana $J_F(x_0, y_0)$. El teorema de linealización de Hartman-Grobman nos dice que si los valores propios de la matriz jacobiana $J_F(x_0, y_0)$ no son nulos o imaginarios puros, el punto crítico del sistema linealizado es del mismo tipo y estabilidad del punto crítico del sistema no lineal correspondiente.

Ejemplo: *Clasifique los puntos de equilibrio del sistema no lineal del ejemplo anterior*

Teníamos que:

Para $P_1 = (0,1)$:

$$\overrightarrow{x_l}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

Para $P_1 = (0,-1)$:

$$\overrightarrow{x_l}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

Para $J_F(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = \sqrt{2}i, \lambda_2 = -\sqrt{2}i$, lo que significa que es un centro estable para la linealización.

Para $J_F(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$, lo que significa que es un punto de silla inestable para la linealización.

Para $P_1 = (0,1)$ obtuvimos valores propios imaginarios puros por lo que el teorema de de linealización de Hartman-Grobman no es suficiente para clasificar el punto de equilibrio del sistema no lineal.

Para $P_2 = (0,-1)$ obtuvimos valores propios reales y de distinto digno por lo que el teorema de de linealización de Hartman-Grobman nos dice que la clasificación del punto de equilibrio del sistema linealizado es el mismo que para el sistema no lineal. Luego el punto $P_2 = (0,-1)$ es un punto de silla inestable para el sistema no lineal.

Sistemas Hamiltonianos

Un sistema de la forma $x' = f(x,y),\ y' = g(x,y)$ es Hamiltoniano si existe una función $H(x,y)$ tal que:

$$x' = f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Además debe cumplirse que:

$$-f_x(x,y) = g_y(x,y)$$

Los puntos críticos son los puntos en que x' e y' se anulan, es decir, donde el gradiente de $H(x,y)$ es igual a 0. Si estos puntos son máximos o mínimos del hamiltoniano, son centros del sistema diferencial y, si son puntos silla, son puntos silla también para el sistema. Para clasificar los puntos como máximo, mínimo o punto silla es necesario analizar la matriz hessiana:

$Hess(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix}$, evaluada en el punto crítico. Luego el criterio de clasificación es el siguiente:

- Si el determinante del Hessiano $|Hess(x_0, y_0)| > 0$ y $H_{xx} > 0 \rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto mínimo.
- Si el determinante del Hessiano $|Hess(x_0, y_0)| > 0$ y $H_{xx} < 0 \rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto máximo.
- Si el determinante del Hessiano $|Hess(x_0, y_0)| < 0 \rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto silla.
- Si el determinante del Hessiano $|Hess(x_0, y_0)| = 0 \rightarrow$ el criterio no es concluyente

Ejemplo:

a) *Probar que el siguiente sistema es Hamiltoniano*

$$x' = 2y$$
$$y' = 3(1 - x^2)$$

Solución:

Se debe cumplir que $-f_x(x,y) = g_y(x,y)$, con $x' = f(x,y) = 2y$ y $y' = g(x,y) = 3(1 - x^2)$:

$$-f_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} 2y = 0$$

$$g_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} 3(1 - x^2) = 0$$

Luego el sistema es Hamiltoniano.

b) *Encontrar H(x,y)*

Solución:

Como el sistema es Hamiltoniano se debe cumplir que $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$ y que $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$. Partimos por $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$2y = -\frac{\partial H}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial y} = -2y \rightarrow H(x,y) = -y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = h(x)' = 3(1 - x^2) \rightarrow h(x) = 3(x - \frac{x^3}{3})$$

Finalmente:

$$H(x,y) = -y^2 + 3x - x^3$$

c) *Analizar los puntos críticos del sistema*

Solución:

Los puntos críticos del sistema son los que satisfacen $2y = 3(1 - x^2) = 0 \rightarrow y = 0, x = \pm 1$. Luego existen dos puntos críticos:

$$P_1 = (1,0), \quad P_2 = (-1,0)$$

Para analizarlos debemos verificar si los puntos corresponden a máximos, mínimos o puntos sillas de la función $H(x, y)$. Para ello analizamos la matriz Hessiana:

$$Hess(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix}$$

Donde $H_{xx} = -6x, \ H_{xy} = 0, \ H_{yy} = -2$. Luego la matriz Hessiana corresponde a:

$$Hess(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para $P_1 = (1,0)$ evaluamos la matriz Hessiana en el punto en cuestión:

$Hess(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |Hess(1,0)| = 12 > 0 \ y \ H_{xx} = -6 < 0 \rightarrow (1,0)$ es un máximo del Hamiltoniano y por ende corresponde a un centro del sistema diferencial.

Para $P_2 = (-1,0)$ evaluamos la matriz Hessiana en el punto en cuestión:

$Hess(-1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |Hess(-1,0)| = 12 < 0 \rightarrow (-1,0)$ es un punto silla del Hamiltoniano y por ende corresponde a un punto silla del sistema diferencial.

<u>Ejemplo:</u>

a) *Probar que el siguiente sistema es Hamiltoniano*

$$x' = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$y' = -xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Solución:

Se debe cumplir que $-f_x(x, y) = g_y(x, y)$, con $x' = f(x, y) = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ y $y' = g(x, y) = -xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$:

$$-f_x(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$g_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} - xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Luego el sistema es Hamiltoniano.

b) Encontrar H(x,y)

Solución:

Como el sistema es Hamiltoniano se debe cumplir que $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$ y que $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$. Partimos por $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -\frac{\partial H}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial y} = -ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \rightarrow H(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + h(x)$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = h(x)' - xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \rightarrow h(x)' = 0 \rightarrow h(x) = C = 0$$

Finalmente:

$$H(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

c) Analizar los puntos críticos del sistema

Solución:

Los puntos críticos del sistema son los que satisfacen $ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \rightarrow y = 0, x = 0$. Luego existe un punto crítico: $(0,0)$

Para analizarlo debemos verificar si el punto corresponde a un máximo, mínimo o punto silla de la función $H(x,y)$. Para ello analizamos la matriz Hessiana:

$$Hess(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix}$$

Donde $H_{xx} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $H_{xy} = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $H_{yy} = (y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Luego la matriz Hessiana corresponde a:

$$Hess(x,y) = \begin{pmatrix} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & (y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{pmatrix}$$

Para $(0,0)$ evaluamos la matriz Hessiana en el punto en cuestión:

$Hess(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |Hess(x,y)| = 1 > 0\ y\ H_{xx} = -1 < 0 \rightarrow (0,0)$ es un máximo del Hamiltoniano y por ende corresponde a un centro del sistema diferencial.

Ejemplo: *Considere el siguiente sistema*

$$x' = 1 - y^2$$

$$y' = x(1 + y^2)$$

a) *¿Es éste un sistema Hamiltoniano?*

Solución:

Se debe cumplir que $-f_x(x,y) = g_y(x,y)$, con $x' = f(x,y) = 1 - y^2$ y $y' = g(x,y) = x(1 + y^2)$:

$$-f_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}(1 - y^2) = 0$$

$$g_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}x(1 + y^2) = 2xy$$

Luego el sistema NO es Hamiltoniano.

b) *Si multiplicamos $F(x,y)$ por $\frac{1}{1+y^2}$, ¿es este nuevo sistema un sistema Hamiltoniano?*

Solución: Tenemos que:

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \\ x \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir que $-f_x(x,y) = g_y(x,y)$, con $x' = f(x,y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ y $y' = g(x,y) = x$:

$$-f_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1 - y^2}{1 + y^2}) = 0$$

$$g_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}x = 0$$

Luego el sistema es Hamiltoniano.

c) *¿Puede encontrar el Hamiltoniano?*

Solución:

Como el sistema es Hamiltoniano se debe cumplir que $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$ y que $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$. Partimos por $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$:

$$x = \frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow H(x,y) = \frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = h(y)' = -\frac{1-y^2}{1+y^2} = 1 - \frac{2}{1+y^2} \rightarrow h(y) = y - 2\arctan(y)$$

Finalmente:

$$H(x,y) = \frac{x^2}{2} + y - 2\arctan(y)$$

d) ¿Por qué funciona este método?

Solución: El método funciona porque la función por la que multiplicamos el campo vectorial actúa como factor integrante.

Ejercicio:

a) Encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema autónomo:

$$x' = -sen(x)cos(y)$$
$$y' = cos(x)\, sen(y)$$

Solución:

Los puntos de equilibrio satisfacen $-sen(x)cos(y) = 0$ y $\cos(x)\, sen(y) = 0$. Las soluciones son dos:

i) Los puntos (x,y) tales que $sen(x) = 0, sen(y) = 0$, es decir:

$$x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad y = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

i) Los puntos (x,y) tales que $cos(x) = 0, cos(y) = 0$, es decir:

$$x = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) Indique cuales de los puntos de equilibrio de a) pueden ser clasificados por el método de linealización como atractores, repulsores o sillas.

Solución:

Como el sistema es no lineal, debemos linealizarlo y analizar la matriz jacobiana:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y) & sen(x)sen(y) \\ -sen(x)sen(y) & \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Para el punto del tipo $(k\pi, l\pi)$ tenemos que:

$$J_F(k\pi, l\pi) = \begin{pmatrix} -\cos(k\pi)\cos(l\pi) & 0 \\ 0 & \cos(k\pi)\cos(l\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+l+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+l} \end{pmatrix}, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2$$

Los valores propios satisfacen:

$$|J_F(k\pi, l\pi) - \lambda I| = 0 \rightarrow \left((-1)^{k+l+1} - \lambda\right)\left((-1)^{k+l} - \lambda\right) = 0 \rightarrow \lambda_1 = (-1)^{k+l+1}, \lambda_2 = (-1)^{k+l}$$

Luego los valores propios son 1 y -1. Por lo tanto los puntos de equilibrio $(k\pi, l\pi), (k,l) \in \mathbb{Z}^2$, son puntos sillas inestables como puntos de equilibrio del sistema linealizado y por teorema de Hartman-Grobman son también puntos sillas inestables del sistema no lineal.

Para el punto del tipo $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ tenemos que:

$$J_F\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & sen\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) sen(\frac{\pi}{2} + n\pi) \\ -sen\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) sen(\frac{\pi}{2} + n\pi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{m+n} \\ (-1)^{m+n+1} & 0 \end{pmatrix}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2$$

Los valores propios satisfacen:

$$\left|J_F\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right) - \lambda I\right| = 0 \rightarrow \lambda^2 - (-1)^{2(m+n)+1} = 0 \rightarrow \lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

Luego los valores propios son i y $-i$. Por lo tanto los puntos de equilibrio $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right), (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, son centros estables como puntos de equilibrio del sistema linealizado pero por teorema de Hartman-Grobman, al ser los valores propios imaginarios puros, no pueden ser clasificados por el método de linealización.

c) *Demuestre que el sistema a) es hamiltoniano, encuentre explícitamente una función de Hamilton, y clasifique todos los puntos de equilibrio de a) como estables o inestables.*

Solución:

Se debe cumplir que $-f_x(x,y) = g_y(x,y)$, con $x' = f(x,y) = -sen(x)cos(y)$ y $y' = g(x,y) = cos(x)\, sen(y)$:

$$-f_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} - sen(x)cos(y) = \cos(x)\cos(y)$$

$$g_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} cos(x)\, sen(y) = \cos(x)\cos(y)$$

Luego el sistema es Hamiltoniano. Como el sistema es Hamiltoniano se debe cumplir que $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$ y que $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}$. Partimos por $f(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$-sen(x)cos(y) = -\frac{\partial H}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial y} = sen(x)cos(y) \rightarrow H(x,y) = sen(x)sen(y) + h(x)$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = h(x)' + \cos(x)\, sen(y) = cos(x)\, sen(y) \rightarrow h(x)' = 0 \rightarrow h(x) = C = 0$$

Finalmente:

$$H(x,y) = sen(x)sen(y)$$

Para analizar los puntos de equilibrio que ya tenemos debemos verificar si los puntos corresponden a máximos, mínimos o puntos sillas de la función $H(x,y)$. Para ello analizamos la matriz Hessiana:

$$Hess(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix}$$

Donde $H_{xx} = -sen(x)sen(y)$, $H_{xy} = \cos(x)\cos(y)$, $H_{yy} = -\cos(x)\, sen(y)$. Luego la matriz Hessiana corresponde a:

$$Hess(x,y) = \begin{pmatrix} -sen(x)sen(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -sen(x)sen(y) \end{pmatrix}$$

Para $P_1 = (k\pi, l\pi)$ evaluamos la matriz Hessiana en el punto en cuestión:

$Hess(k\pi, l\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(k\pi)\cos(l\pi) \\ \cos(k\pi)\cos(l\pi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+l} \\ (-1)^{k+l} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$
$|Hess(k\pi, l\pi)| = -12 < 0 \rightarrow (k\pi, l\pi)$ es un punto silla del Hamiltoniano y por ende corresponde a un punto silla del sistema diferencial.

Para $P_2 = \left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ evaluamos la matriz Hessiana en el punto en cuestión:

$$Hess\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{pmatrix} -sen\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) sen\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) & 0 \\ 0 & -sen\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) sen\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} (-1)^{m+n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{m+n+1} \end{pmatrix} \rightarrow \left|Hess\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right| = 1 > 0$ y H_{xx} es positivo si $m+n$ es impar o negativo si $m+n$ es par. Por lo tanto el punto $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ es máximo y mínimo para $m+n$ pares e impares respectivamente. Por lo tanto, $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ corresponde a un centro estable del sistema diferencial.