PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2016

Examen
Mat1640, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Encuentre dos soluciones para el problema

$$\left.\begin{array}{rcl} xy' + y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right\}$$

y verifique además que el problema

$$\left.\begin{array}{rcl} xy' + y & = & 0 \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right\}$$

no tiene solución. Explique

Respuesta: La ecuación es lineal y puede escribirse como $(xy)' = 1$, de modo que las soluciones satisfacen $xy = c$, donde c es una constante arbitaria.

Para el primer ítem, la condición inicial implica que $c = 0$ y, por lo tanto, $y = 0$ es la única solución.

Para el segundo caso, si y fuera una solución, reemplazando en la ecuación y evaluando en $x = 0$, se obtendría una contradicción.

La explicación es que cuando $x = 0$, **no** se satisfacen las hipótesis del Teorem de Existencia y Unicidad , así es que no está garantizada la existencia de soluciones y tampoco la unicidad.

2. *a*) Encuentre una matriz fundamental para el sistema lineal,

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& 5x-2y \\ y' &=& 2x+y \end{array}\right\}$$

b) Encuentre una solución particular de

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& 5x-2y+e^{3t} \\ y' &=& 2x+y+2e^{3t} \end{array}\right\}$$

Respuesta: El polinomio característico de la matriz A del sistema es $\lambda^2-6\lambda+9$. Por lo tanto, $\lambda=3$ es el único valor propio y tiene multiplicidad algebraica igual a 2.

La multiplicidad geométrica es 1 y podemos elegir el vector propio $v_1=(1,1)^t$.

Como $(A-3I)^2$ es cero, podemos elegir cualquier v_2 l.i. con v_1, por ejemplo, $v_1=(1,0)^t$. Se obtiene entonces dos soluciones l.i.,

$$e^{3t}v_1$$

y

$$e^{3t}(v_2+t(A-3I)v_2)$$

Una matriz fundamental es entonces

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{3t} & (1+2t)e^{3t} \\ e^{3t} & 2te^{3t} \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix} -2te^{-3t} & (1+2t)e^{-3t} \\ e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea usamos variación de parámetros,

$$(x_p(t)\ y_p(t))^t=\Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)(e^{3t}\ 2e^{3t})^t dt\,,$$

Obteniendo,

$$e^{3t}\begin{pmatrix} 1+4t+t^2 \\ 2t+3t^2 \end{pmatrix}$$

3. Resuelva la ecuación integro–diferencial $\quad y'(t) \,=\, 1 - \text{sen}\, t - \displaystyle\int_0^t y(s)ds; \quad y(0) = 0.$

Respuesta : Aplicaremos transformadas de Laplace a ambos lados.

Usando ´directamente fórmula *ad–hoc* o bien notando que la integral es la convolución de $y(t)$ con la función constante 1 tenemos

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(s)ds\right) \,=\, \frac{Y(s)}{s} \qquad \text{donde} \quad Y \,=\, \mathcal{L}(y).$$

Usando ahora las fórmulas $\mathcal{L}(y')(s) \,=\, s\mathcal{L}(y) \,-\, y(0)$ y $\mathcal{L}(1)(s) \,=\, 1/s$; $\mathcal{L}(\text{sen}\, t)(s) \,=\, 1/(1+s^2)$ obtenemos

$$sY(s) \,=\, \frac{1}{s} \,-\, \frac{1}{1+s^2} \,-\, \frac{Y(s)}{s} \quad \longrightarrow \quad Y(s) \,=\, \frac{1}{s^2+1} \,-\, \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Aplicando transformada inversa,

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \,-\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) \\ &=\; \text{sen}\, t \,-\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) \\ &=\; \text{sen}\, t \,-\, \frac{t}{2}\,\text{sen}\, t \end{aligned}$$

donde la primera transformada inversa es directa y la segunda se puede obtener usando que

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} \,=\, \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{ds}\,\frac{1}{(s^2+1)}\right)$$

o bien que

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} \,=\, \mathcal{L}(\text{sen}\, t)(s) \cdot \mathcal{L}(\cos\, t)(s)$$

y por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) \,=\, \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(\text{sen}\, t)(s) \cdot \mathcal{L}(\cos\, t)(s)\right) \,=\, \int_0^t \text{sen}\, x \cos(t-x)\, dx,$$

la convolución de seno y coseno.

Observación: La ecuación original se puede derivar, convirtiéndola en $y'' \,=\, -\cos\, t \,-\, y$, con condiciones inciales $y(0) = 0$; $y'(0) \,=\, 1$, para luego ser resuelta mediante las técnicas apropiadas para una ecuación lineal no–homogénea de orden 2.

4. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= 2xy - x^2 - x \\ y'(t) &= 2xy - y^2 + y\,. \end{cases}$$

es hamiltoniano. Encuentre una función hamiltoniana (constante de movimiento) para él y úsela para analizar la naturaleza del punto crítico $(0,\, 0)$.

Respuesta : Si llamamos $F(x,y) = 2xy - x^2 - x$ y $G(x,y) = 2xy - y^2 + y$, se cumple que $F_x = 2y - 2x - 1 = -G_y$, por lo cual el sistema sí es hamiltoniano.

Buscamos una función hamiltoniana para el problema. Esto es, una función $H(x,y)$ tal que

$$H_x = G(x,y) = 2xy - y^2 + y$$

$$H_y = -F(x,y) = x^2 + x - 2xy.$$

Integrando y derivando parcialemente, de la manera usual, llegamos a que

$$H(x,y) = x^2y - xy^2 + xy.$$

Esta función posee, en el punto $(0,0)$ un punto crítico. Su hessiano es

$$H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 = -4xy - (2x - 2y + 1)^2 = -1 \quad \text{cuando} \quad x = y = 0,$$

por lo que allí H tienen un punto de silla. Por tanto , el punto crítico del sistema es de tipo silla (nodo inestable).

5. Dado el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2 + y^2 - 6 \\ y'(t) &= x^2 - y\,. \end{cases}$$

encuentre el sitema linealizado correspondiente en torno a cada uno de sus puntos críticos y discuta sobre su estabilidad.

Respuesta : Si llamamos $F(x,y) = x^2+y^2-6$ y $G(x,y) = x^2-y$, entonces los puntos críticos son las soluciones del sistema $F = G = 0$. Resolviendo obtenemos dos puntos:

$$P1 = (-\sqrt{2},\, 2) \quad \text{y} \quad P2 = (\sqrt{2},\, 2).$$

La matriz jacobiana de F y G es

$$J(F,G)(x,y) = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ \\ 2x & -1 \end{bmatrix}.$$

- En el punto $P1$ tenemos que

$$J(F,G)(-\sqrt{2},2) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix},$$

la cual tiene polinomio característico $p_1(x) = x^2+(2\sqrt{2}+1)x+8\sqrt{2}$ cuyas raíces son los complejos conjugados $-\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{36\sqrt{2}-9}}{2}\, i$ con parte real negativa. Por tanto, el origen es un atractor estable para el sistema lineal y, por el Teorema de Hartman–Grobman, el punto $P1$ es también un atractor estable.

- En el punto $P2$ tenemos que

$$J(F,G)(\sqrt{2},2) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix},$$

la cual tiene polinomio característico $p_2(x) = x^2-(2\sqrt{2}-1)x-10\sqrt{2}$ cuyas raíces son $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{36\sqrt{2}+9}}{2}$, reales y de signos distintos. Por tanto, el origen es un punto tipo silla (nodo) para el sistema lineal y, por el Teorema de Hartman–Grobman, el punto $P2$ es también un punto de silla.