Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1 de Octubre de 2012

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Solución de la Interrogación N$^{\text{o}}$ 2.

1. *a*) Compruebe que la función $y_1(t) = t\sin(2t) + \sin(2t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2(2(t+1)^2+1)y = 0$$

y obtenga una segunda solución $y_2(t)$ que sea linealmente independiente de y_1.

b) Usando el método de variación de parámetros, resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' - \frac{2}{t+1}y' + 2(2 + \frac{1}{(t+1)^2})y = 2t+2, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Solución:

Verificación de que y_1 es solución:

Cualquiera de las siguientes alternativas da :

- Pueden darse cuenta por inspección que $y_2(t) = (t+1)\cos(2t)$ es solución y es l.i. con y_1. En este caso deben comprobar que y_2 es solución.
- Pueden poner $y_2(t) = c(t)y_1(t)$ y calcular $c(t)$ y mostrar que es l.i. con y_1.
- Pueden usar la fórmula de Abel para calcular y_2 y mostrar que es l.i. con y_1.

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{\int 2/(t+1)}}{y_1^2}$$

Variación de parámetros:

- Pueden poner $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ donde

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0, \qquad c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = 2(t+1).$$

y resolver:

$$c_1'(t) = \cos 2t, \qquad c_2'(t) = -\sin 2t,$$

lo que integrando por partes da

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\sin 2t, \qquad c_2(t) = \frac{1}{2}\cos 2t,$$

luego

$$y_p(t) = \frac{t+1}{2},$$

luego la solución general es

$$y(t) = \frac{t+1}{2} + A(t+1)\sin 2t + B(t+1)\cos 2t$$

y calcular $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$ para satisfacer las c.i.

- Pueden usar la fórmula

$$y_p(x) = \int_0^x G(x,t)(2t+2)dt,$$

donde

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} (t+1)\sin 2t & (t+1)\cos 2t \\ (x+1)\sin 2x & (x+1)\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t+1)\sin 2t & (t+1)\cos 2t \\ 2(t+1)\cos 2t + \sin 2t & -2(t+1)\sin 2t + \cos 2t \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x+1)(t+1)\sin(2t-2x)}{-2(t+1)^2} = -\frac{x+1}{2(t+1)}\sin(2t-2x), \end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -(x+1)\int_0^x \sin(2t-2x)dt \\ &= (x+1)\Big(\frac{\cos(2t-2x)}{2}\Big|_0^x\Big) \\ &= (x+1)\Big(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\Big). \end{aligned}$$

Luego la solución general es

$$y(x) = \frac{x+1}{2} + A(x+1)\sin 2x + B(x+1)\cos 2x$$

y deben calcular $A = 0$ y $B = \frac{1}{2}$ para satisfacer las c.i.

2. *a*) Usar el método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3t + 1$$

b) Hallar los valores de α y β para que el problema de valores iniciales

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \qquad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$$

tenga una solución no trivial ($y \not\equiv 0$) para la cual $t = 0$ sea un punto de inflexión.

Solución:

a) El polinomio característico asociado a la ecuación homogénea es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$, luego e^{-t} y te^{-t} son una base para el espacio solución de la ecuación homogénea, y se tiene que una solución particular de la ecuación no homogénea es de la forma

$$y(t) = At^2e^{-t} + Bt + C.$$

Reemplazando en la ecuación da

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 3, \quad C = -5.$$

Así, la solución general de la ecuación dada es

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 3t - 5 + ae^{-t} + bte^{-t}.$$

b) La condición de solución no trivial es $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. El polinomio característico asociado a la ecuación dada es $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$, luego la solución general de la ecuación dada es

$$y(t) = Ae^{-5t} + Be^{2t}.$$

Para satisfacer las condiciones iniciales se debe tener

$$A + B = \alpha, \qquad -5A + 2B = \beta,$$

lo que da

$$A = \frac{2\alpha - \beta}{7}, \qquad B = \frac{5\alpha + \beta}{7}.$$

La condición de punto de inflexión es $y''(0) = 0$, lo que da

$$25\frac{2\alpha - \beta}{7} + 4\frac{5\alpha + \beta}{7} = 0,$$

de donde la condición es

$$10\alpha - 3\beta = 0.$$

(Notar que $y'''(0) = -125A + 8B \neq 0$, de manera que $(0, \alpha)$ es un punto de inflexión para estos valores de (α, β))

3. Una masa de 1 Kg.está sujeta a un resorte cuya constante es 9 N/m. El medio ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. La masa se suelta desde un punto que está 2 m sobre la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de v_0 m/seg.. Determinar los valores de v_0 de modo que posteriormente la masa pase por la posición de equilibrio.

(Las unidades están todas expresadas en el Sistema Internacional de Unidades.)

Solución:

El Problema de Valores Inciales que modela el movimiento de este oscilador es

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0; \quad x(0) = -2; \quad x'(0) = v_0.$$

El polinomio característico de la ecuación es $r^2 + 6r + 9$ con raíz $r = -3$ de multiplicidad dos Conforme a ello la solución general de la ecuación es

$$x(t) = e^{-3t}\,(At + B\,).$$

Aplicando las condiciones inciales obtenemos

$$A = v_0 - 6; \quad B = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-3t}\,(\,(v_0 - 6)t - 2\,).$$

La masa pasa por la posición de equilibrio si, para algún $t > 0$ se cumple $x(t) = 0$.

Finalmente,

$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_0 - 6)t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2}{v_0 - 6}$$

de modo que esto ocurre en un tiempo positivo si y sólo si $v_0 > 6$.

4. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

donde las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son continuas en el intervalo $[0,1]$ y sean y_1 e y_2 dos soluciones de ella.

a) Demuestre que si $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in (0,1)$, entonces y_1 e y_2 son linealmente dependientes.

b) Suponga que y_1 e y_2 tienen ambas un punto de inflexión en algún $x_0 \in (0,1)$. Demuestre que si $a(x_0)$ y $b(x_0)$ no son ambas cero, entonces y_1 e y_2 son linealmente dependientes.

Solución:

a)

- De la hipótesis,

$$W(y_1,y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

  Por la fórmula de Abel,

$$W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = 0,$$

  luego y_1, y_2 son l.d.

- Pueden demostrarlo directamente:
  Si una de las soluciones es la idénticamente 0, entonces son obviamente l.d. Si por ejemplo $y_1(x) \not\equiv 0$, entonces por el Teorema de Existencia y Unicidad, y como $y_1(x_0) = 0$, se debe tener que $y_1'(x_0) \neq 0$, y la función

$$z(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x)$$

  es una solución de la ecuación que satisface

$$z(x_0) = 0 = y_2(x_0), \qquad z'(x_0) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

  luego nuevamente por el T. E. U., $z(x) \equiv y_2(x)$, de donde

$$y_2(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x), \quad \text{es decir } y_1,\ y_2 \text{ son l.d.}$$

b) Si y_1 e y_2 tienen ambas un punto de inflexión en algún $x_0 \in (0,1)$, entonces $y_1''(x_0) = y_2''(x_0) = 0$, luego usando la ecuación se tiene

$$0 = -a(x_0)y_1'(x_0) - b(x_0)y_1(x_0), \quad 0 = -a(x_0)y_2'(x_0) - b(x_0)y_2(x_0),$$

es decir $(a(x_0), b(x_0)) \neq (0,0)$ satisface el sistema lineal homogéneo de ecuaciones en (u,v)

$$y_1'(x_0)u + y_1(x_0)v = 0$$
$$y_2'(x_0)u + y_2(x_0)v = 0.$$

Como el determinante principal de este sistema es

$$\begin{vmatrix} y_1'(x_0) & y_1(x_0) \\ y_2'(x_0) & y_2(x_0) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = -W(y_1,y_2)(x_0),$$

se concluye que $W(y_1,y_2)(x_0) = 0$ y por lo tanto igual que en la parte *a*) las soluciones y_1 e y_2 son l.d.