Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Pauta Examen

1. Considere el PVI
$$(x+3)y' = (y+3), \qquad y(a) = b.$$
Determine los valores de a y b tales que la ecuación diferencial
   (a) tenga única solución y encuentre la solución.
   (b) tenga infinitas soluciones y exhiba al menos 2 soluciones diferentes que lo satisfagan.
   (c) no tenga solución.

Solución: La ecuación propuesta es de variables separables:
$$\frac{dy}{y+3} = \frac{dx}{x+3}$$
$$\implies \ln|y+3| = \ln|x+3| + C$$
Por lo que la solución general es
$$y(x) = c(x+3) - 3, \quad c \in \mathbb{R}$$
además de la solución singular $y = -3$.

   (a) Por el teorema de existencia y unicidad, podemos asegurar que el PVI tiene solución única si $a \neq -3$ y en este caso la solución es
$$y(x) = \left(\frac{b+3}{a+3}\right)(x+3) - 3.$$
   (b) Si $a = -3$, de la EDO tenemos que $b = -3$ y eso lo cumple la solución general para todo valor de c. En otras palabras, por el punto $(-3, -3)$ pasan infinitas soluciones, por ejemplo, $y = x$ e $y = -3$.
   (c) Si $a = -3$ y $b \neq -3$, la EDO no tiene solución ya que esos valores de x e y no satisfacen la ecuación.

Puntaje

- Responde justificadamente el ítem (a): 2 puntos
- Responde justificadamente el ítem (b): 2 puntos
- Responde justificadamente el ítem (c): 2 puntos

2. (a) Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$x''' + 3x'' + x' + 3x = t^2.$$

(b) Determine si las funciones $x_1(t) = t^2$ y $x_2(t) = t^2 + t$ son linealmente dependientes o independientes en $[-5, 7]$. Además, justifique si existe o no una ecuación diferencial de la forma

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

con coeficientes continuos, definida en el intervalo $[-5, 7]$ que tenga a $x_1(t) = t^2$ y $x_2(x) = t^2 + t$ como soluciones. En caso afirmativo, muestre explícitamente un ejemplo de dicha ecuación.

Solución:

(a) La ecuación característica es

$$r^3 + 3r^2 + r + 3 = 0$$

cuyas raíces son $r = -3$, $r = i$ y $r = -i$. Por lo tanto la solución de la ecuación homogénea es

$$y = c_1 e^{-3t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

La solución particular es de la forma $y = a + bt + ct^2$. Se reemplaza en la ecuación y obtenemos $a = \frac{-16}{27}$, $b = \frac{-2}{9}$, $c = \frac{1}{3}$. Por lo tanto la solución general es

$$y = c_1 e^{-3t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) - \frac{16}{27} - \frac{2}{9}t + \frac{1}{3}t^2.$$

(b) Las funciones $x_1(t) = t^2$ y $x_2(t) = t^2 + t$ son linealmente independientes en $[-5, 7]$ ya que para todo $t \in [-5, 7]$ se tiene

$$c_1 t^2 + c_2(t^2 + t) = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Por otro lado, el wronskiano $W(x_1, x_2)(t) = -t^2$ se anula si y sólo si $t = 0$ por lo que no puede existir la ecuación diferencial del enunciado.

Puntaje

- Ítem (a) resuelto correctamente: 3 puntos.
  - 1 punto por solución de ecuación homogénea asociada
  - 1 punto por solución particular
  - 1 punto por solución general de EDO no homogénea
- Ítem (b) respondido correctamente: 3 puntos
  - 1 punto por justificar que son funciones l.i.
  - 2 puntos por justificar que la EDO del enunciado no puede existir

3. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$. Determine la solución.

Solución La ecuación característica de la matriz es

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(-4-\lambda) + 9 &= 0, \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0, \\ (\lambda+1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

entonces $\lambda = -1$ un valor propio repetido.

El vector propio $\mathbf{v}_1$ cumple la ecuación $(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = 0$, es decir, $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0$.

Entonces $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ un vector propio.

El vector propio generalizado cumple la ecuación $(A-\lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, es decir, $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Entonces $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ un vector propio generalizado.

La solución general es

$$\mathbf{x}(t) = \left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)\right) e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2(t + \frac{1}{3}) \\ -c_1 - c_2 t \end{bmatrix} e^{-t}.$$

La condición inicial entrega

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 + \frac{1}{3}c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $c_1 = -1$ y $c_2 = 9$. Por lo tanto, la solución del PVI es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 + 9t \\ 1 - 9t \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Puntaje

- Encuentra valor propio correctamente: 1 punto.
- Encuentra vector propio asociado: 1 punto
- Encuentra vector propio generalizado: 2 puntos
- Plantea la solución general: 1 punto
- Resuelve el PVI: 1 punto.

4. Resolver el problema de valores iniciales utilizando Transformada de Laplace:

$$y'' + 6y' + 13y = 10e^{-2t}, \quad y(0) = 3, y'(0) = -13$$

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[y''] + 6\mathscr{L}[y'] + 13\mathscr{L}[y] &= 10\mathscr{L}\left[e^{-2t}\right] \\
s^2\mathscr{L}[y] - 3s + 13 + 6(s\mathscr{L}[y] - 3) + 13\mathscr{L}[y] &= \frac{10}{s+2} \\
\left(s^2 + 6s + 13\right)\mathscr{L}[y] - 3s - 5 &= \frac{10}{s+2} \\
\Longrightarrow \mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2+6s+13}\left(\frac{10}{s+2} + 3s + 5\right) &= \frac{3s^2+11s+20}{(s+2)\left(s^2+6s+13\right)}
\end{aligned}$$

Al descomponer la última fracción en fracciones parciales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{3s^2+11s+20}{(s+2)\left(s^2+6s+13\right)} &= \frac{As+B}{s^2+6s+13} + \frac{C}{s+2} \\
&= \frac{(A+C)s^2 + (2A+B+6C)s + (2B+13C)}{(s^2+6s+13)(s+2)} \\
\Longrightarrow A = 1, \quad B-3, \quad C &= 2 \\
\Longrightarrow \mathscr{L}[y] = \frac{s-3}{s^2+6s+13} + \frac{2}{s+2}
\end{aligned}$$

Se observa que $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = 2e^{-2t}$ y se calcula $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+6s+13}\right]$.

Completando cuadrados en el denominador para aplicar el teorema de traslación en el eje s:

$$\begin{aligned}
\frac{s-3}{s^2+6s+13} = \frac{s-3}{(s+3)^2+4} &= \frac{(s+3)-6}{(s+3)^2+4} \\
&= \frac{s+3}{(s+3)^2+4} - 3\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4} \\
&= F(s+3) - 3G(s+3)
\end{aligned}$$

donde

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathscr{L}[\cos 2t] \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{2}{s^2+4} = \mathscr{L}[\operatorname{sen} 2t]$$

Por lo tanto

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}\cos 2t - 3e^{-3t}\operatorname{sen} 2t.$$

Puntaje:

- Aplica correctamente la Transformada de Laplace a la ecuación: 1 punto.
- Despeja correctamente $\mathscr{L}[y]$: 1 punto.
- Descompone correctamente en fracciones parciales: 1 punto
- Calcula correctamente $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2}{s+2}]$: 1 punto.
- Calcula correctamente $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+6s+13}\right]$: 1 punto.
- Determina solución del PVI correctamente: 1 punto