Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
02/Junio/2015

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales.
Interrogación 3.

1. [6 pts] Encuentre la solución general del sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 3y \\ y' &= x - 4y + 2 \end{aligned}$$

Soluión: Reescribimos el sistema en forma matricial

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matriz A asociada al sistema tiene polinomio característico

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 5)$$

Luego de calcular los vectores propios, la matriz fundamental nos queda

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-5t} \\ e^{-t} & -e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Asi,

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{-t} + e^{-5t} & 3(e^{-t} - e^{-5t}) \\ e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} + 3e^{-5t} \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$X(t) = \Phi(t)C + e^{At}\int e^{-tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt, \quad C \in \mathbb{R}^2$$

$$\int e^{-tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\int \begin{pmatrix} 3e^{t} + e^{5t} & 3(e^{t} - e^{5t}) \\ e^{t} - e^{5t} & e^{t} + 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} 3(e^{t} - e^{5t}) \\ e^{t} + 3e^{5t} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3(e^{t} - \frac{1}{5}e^{5t}) \\ e^{t} + \frac{3}{5}e^{5t} \end{pmatrix}$$

Notemos que no es necesaria la constante de integración pues no da un múltiplo de la solución de la ecuación homogénea asociada, la cual ya esta considerada en la solución general.

Otra forma sería buscar la solución particular constante y resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. [6 pts] Calcular la solución general del sistema homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

donde

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$ de multiplicidad algebraica 2,

$$A - 3I \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con esto $\ker(A - 2I) = \langle (1,0,0)^T \rangle$, por tanto la matriz A es no diagonalizable. Buscamos el segundo vector propio (generalizado) asociado a $\lambda = 3$.

$$(A - 2I)v_2 = e_1$$

Cuyo espacio solución es $\{x(1,0,0)^T + (0,\frac{1}{2},0)^T,\, x \in \mathbb{R}\}$. Asi $v_2 = \left(0,\frac{1}{2},0\right)^T$.

Las soluciones asociadas a $\lambda = 3$ son

$$x_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Para $\lambda = 4$ tenemos $\ker(A - 4I) = \langle (-1,-1,1)^T \rangle$ cuya solución asociada es

$$x_3(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$\vec{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t)$$

3. *a*) [1 pts.] Demuestre que, independiente de los valores de a, b y c, si λ es un valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix},$$

entonces

$$\vec{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

es vector propio de A asociado a λ.

Solución: Como $|A - \lambda I| = 0$, tenemos (método cofactores) que λ satisface

$$p(\lambda) := -\lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a = 0.$$

Por otra parte

$$A\vec{x}(t) = (\lambda, \lambda^2, -c\lambda^2 - b\lambda - a)^T = =(\lambda, \lambda^2, \lambda^3)^T = \lambda(1, \lambda, \lambda^2)^T.$$

b) [4 pts.] Escriba la ecuación

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = 1$$

como un sistema de primer orden, y encuentre a solución general de este sistema (Ayuda: $\lambda = 1$ es valor propio de la matriz del sistema).

Solución: Consideremos el cambio de variable $y' = v, v' = w$ reemplazando en la ecuación tenemos el sistema

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= w \\ w' &= 1 - 4w - v + 6y \end{aligned}$$

Para $\vec{x}(t) = (y, v, w)^T$ escribimos el sistema de la forma matricial $\vec{x}'(t) = A\vec{x} + f(t)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A tiene por polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda + \lambda + 6$, como 1 es raíz $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$

Por parte (a) tenemos que los vectores propios asociados a $1, -2, -3$ son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del problema homogéneo es

$$\vec{x}_c(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Usando coeficientes indeterminados, ya que $f(t)$ es constante, buscamos una solución para $\vec{x}$ constante. El sistema lineal $A\vec{x} = -f$ tiene por solución $\left(-\frac{1}{6}, 0, 0\right)^T$

Por tanto la solucion general del sistema es

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) [1 pts.] A partir de la solución que encontró en la parte (*b*), determine la solución general de la ecuación $y''' + 4y'' + y' - 6y = 1$.

Solución: Corresponde a la primera coordenada del vector solución del sistema anterior

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t} - \frac{1}{6}.$$

4. [6 pts] Considere el problema

$$x' = -x + ay$$
$$y' = x - 2y$$

Para que valores de a se tiene que todas las soluciones $\vec{x}(t)$ satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} \|\vec{x}(t)\| = 0, \quad \text{donde } \vec{x}(t) = (x(t), y(t))$$

Justifique su respuesta.

Solución: Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 - a$.

Resolvemos por casos con respecto a los valores propios $\lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

Caso 1 $\Delta = 1 + 4a < 0$ por tanto los valores propios son

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{|\Delta|},\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{|\Delta|}$$

Que genera soluciones de la forma

$$e^{-\frac{3}{2}t}\left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t)\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Caso 2 Si $\Delta = 0$ tenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$. Por tanto nuestra soluciones tienen la forma

$$e^{-\frac{3}{2}}(c_1 v_1 + c_2 t v_2) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Caso 3 Si $\Delta > 0$,

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2} < 0$$
$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2} < 0 \leftrightarrow 1 + 4a < 9 \leftrightarrow a < 2.$$

Si los valores propios son positivos, las bases solución tiene exponenciales crecientes en t, que divergen al infinito.
