Ecuaciones Diferenciales * MAT1640

RESOLUCIÓN EXAMEN

Problema 1

a) Demuestre que si A es una matriz cuadrada no nula que satisface que $A^2 = 3A$ entonces

$$e^{At} = I + \frac{1}{3}\left(e^{3t-1} - 1\right) A\,.$$

b) Calcular la solución general del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= -x + y - z \\ z' &= x - y + z \end{aligned}$$

Solución a)

Por la definición de la matriz exponencial se tiene que

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Por la propiedad $A^2 = 3A$ se obtiene de inmediato que $\boxed{A^k = 3^{k-1}A}$ para $k \geq 2$.

De esta manera se obtiene que :

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!} 3^{k-1} A \\ &= I + tA + \left(\sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!} 3^{k-1}\right) A \\ &= I + tA + \frac{1}{3}\left(\sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!} 3^{k}\right) A \\ &= I + tA + \frac{1}{3}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} 3^{k} - 1 - 3t\right) A \\ &= I + tA + \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 1 - 3t\right) A = I + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)A \end{aligned}$$

Solución b)

La matriz A del problema satisface que $A^2 = 3A$. Sabemos que la matriz fundamental del sistema lineal de coeficientes constantes es la matriz exponencial $\Phi(t) = e^{At}$. Usando el problema a) se obtiene entonces que la solución general del sistema es

$$X(t) = e^{At}\hat{c} = \hat{c} + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)A\hat{c}\,.$$

Solución b)

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ la cual tiene polinomio característico $p(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$.

Resumiendo, los valores propios de A son:

$\lambda = 3$ con vector propio asociado $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$\lambda = 0$ con vectores propio asociados $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. De esta manera se obtiene que la solución general del sistema es

$$X(t) = c_1 v_1 e^{3t} + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

También se puede escribir de la forma

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2 & 0 \\ -e^{3t} & 1 & 1 \\ e^{3t} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Problema 2
Considere el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= e^{y^2} + \alpha x - x^5 - 1 \\ y' &= -\sin(x) - y^5 \end{aligned}$$

Determine todos los valores de $\alpha \neq 0$ para los cuales el origen (0,0) es estable, inestable o asintóticamente estable.

Solución

Solución: Primero calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y^2} + \alpha x - x^5 - 1 \\ -\sin(x) - y^5 \end{pmatrix},$$

que es

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - 5x^4 & 2ye^{y^2} \\ -\cos(x) & -5y^4 \end{pmatrix}.$$

Evaluamos esta matriz en $(0,0)$ para obtener

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda = \lambda(\alpha - \lambda).$$

Con esto los valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = \alpha$.

La solucion del sistema lineal asociado al sistema no lineal es

$$u(t) = c_1 v_1 + c_2 v_2 e^{\alpha t}$$

Tenemos entonces dos casos: cuando $\alpha > 0$ la solución del sistema linealizado asociado en el punto crítico $(0,0)$ es inestable. Cuando $\alpha < 0$ la solución tiende a una constante por tanto es estable si c_1 es cercano a $(0,0)$.

Problema 3 Calcule la solución del problema no lineal

$$yy' + \frac{1}{x} = \frac{e^{-y^2}}{x^2}$$

con condición inicial $y(2) = \sqrt{\ln 2}$. Determine su intervalo máximo de definición. Ayuda: Trate con una sustitución adecuada.

Solución

Muliplicando la ecuación por la función e^{y^2} la ecuación se convierte en

$$yy'e^{y^2} + \frac{1}{x}e^{y^2} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Notemos que la derivada de la exponencial e^{y^2} es: $(e^{y^2})_x = 2yy'e^{y^2}$. Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{e^{y^2}}{dx} + \frac{1}{x}e^{y^2} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Multiplicando por $2x^2$ y haciendo la sustitución $u = e^{y^2}$, se obtiene finalmente una ecuación lineal de primer orden para u,

$$x^2u' + 2xu = 2 \Rightarrow (x^2u)_x = 2$$

Notemos que $u(2) = e^{y^2(2)} = 2$. Integrando,

$$x^2u(x) = 4 \cdot 2 + \int_2^x 2ds = 8 + 2(x-2) = 2x + 4 \Rightarrow \boxed{u(x) = \tfrac{2x+4}{x^2}}$$

En resumen,

$$y(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2x+4}{x^2}\right)}$$

La solución debe estar definida en una vecindad de 2, precisamente,

$$\frac{2x+4}{x^2} \geq 1 \Rightarrow 2 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{5}\,.$$

Problema 4
Calcule, usando transformada de Laplace, la solución del problema de valor inicial siguiente:

$$y'' - 3y' + 2y = h\,, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 1\,,$$

donde h está definida por $h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 5 \\ 0 & \text{si } t < 5 \end{cases}$

Solución

Aplicando la transformada de Laplace y las condiciones iniciales se obtiene que

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = H(s) + 1 \Longrightarrow Y(s) = \frac{H(s) + 1}{s^2 - 3s + 2}$$

donde $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$ y $H(s) := \mathcal{L}\{h\}(s)$.

Usando descomposición en fracciones parciales,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\,.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}^{-1}\{G\}(t) =: g(t) = e^{2t} - e^t$

De esta manera, usando el Teorema de la convolución

$$y(t) = e^{2t} - e^t + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\}(t) = e^{2t} - e^t + (g * h)(t)$$

Por lo tanto,

$$y(t) = e^{2t} - e^t + \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\,.$$

Finalmente,

$$\begin{array}{lll} \text{si} & t \leq 5 & y(t) = e^{2t} - e^t \\ \text{si} & t > 5 & y(t) = e^{2t} - e^t + \int_5^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\,. \end{array}$$

Es decir,

$$y(t) = \begin{cases} e^{2t} - e^t & \text{si} \quad t \leq 5 \\ e^{2t} - e^t + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-15+2t} - \frac{1}{2}e^{-10+t} & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}$$