Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Facultad de Matemáticas, PUC

6 de Mayo, 2013

Interrogación 2

1.- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

a)

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

b)

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

Solución 1.a: La ecuación es de coeficientes constantes. El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda-3)^2$. Dos soluciones L.I. son e^{3t} y te^{3t}. La solución general es

$$y(t) = \alpha e^{3t} + \beta t e^{3t},$$

donde α, β son constantes arbitrarias.

Solución 1.b: La ecuación es no homogénea, y una solución particular se puede encontrar con coeficientes indeteerminados. El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. las soluciones L.I. de la homogénea son $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$. El lado derecho se anula con D^3. Esto dice que una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2\alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1 + (-6\alpha_3 + 2\alpha_2)x + 2\alpha_3 x^2 = x^2.$$

esto dice que $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ y $\alpha_1 = \frac{7}{4}$. La solución general es

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \frac{7}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

2.- Considere la ecuación diferencial lineal

$$y^{(3)} + a_2(x)y^{(2)} + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = 0,$$

donde $a_0, \ldots, a_2$ son funciones continuas en un intervalo I. Demuestre que el conjunto de soluciones de esta ecuación definidas en I que satisfacen

$$y(0) = 0$$

es un espacio vectorial de dimensión 2. *Sugerencia: Considere soluciones con condiciones iniciales* $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ *e* $y(0) = y''(0)$, $y'(0) = 1$.

Solución: Sea y_1 la única solución que satisface $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, e y_2 la única solución que satisface $y(0) = y''(0)$, $y'(0) = 1$. Sea ahora y una solución cualquiera que satisface $y(0) = 0$. Llamemos $\alpha = y'(0)$ y $\beta = y''(0)$. Entonces $y(t)$ satisface la ecuación más las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = \alpha, \;\; y''(0) = \beta.$$

Pero la función $v(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t)$ también satisface la ecuación más las condiciones

$$v(0) = 0, \;\; v'(0) = \alpha, \;\; v''(0) = \beta.$$

Como la ecuación con condiciones iniciales tiene solución única, entonces $y(t) = v(t)$ para todo $t \in I$. Esto dice que toda solución que satisface $y(0) = 0$ es combinación lineal de y_1 e y_2. para demostrar que el conjunto de soluciones que satisface $y(0) = 0$ tiene dimensión 2 basta ver que y_1 e y_2 son L.I. Para ver esto tomemos constantes a, b tales que $ay_1(t) + by_2(t) = 0$. Derivando obtenemos que

$$ay_1'(t) + by_2'(t) = 0$$

para todo $t \in I$. Evaluando en $t = 0$, como $y_1'(0) = 0$ e $y_2'(0) = 1$ entonces $b = 0$. Entonces $ay_1(t) = 0$ para todo t, Derivando dos veces obtenemos que $ay_1''(t) = 0$. Evaluando en $t = 0$, como $y_1''(t) = 1$, entonces $a = 0$. Esto dice que y_1 e y_2 son L.I. El conjunto de soluciones que satisface $y(0) = 0$, como es generado por y_1 e y_2 que son L.I., tiene dimensión 2.

3.- Sea $f(\lambda) = (1 - \lambda)^3(\lambda - 1 - a)$. Determine los valores de a de modo que la solución constante $y(t) = 1$ de la ecuación diferenclal $y' = f(y)$ es estable (o atractora, que es lo mismo).

Solución: Observemos que, si $a < 0$, entonces $f(\lambda) > 0$ en un pequeño intervalo de la forma $]1-\delta, 1[$, mientras que $f(\lambda) < 0$ en un intervalo de la forma $]1, 1+\delta[$, para algún $\delta > 0$ pequeño. Esto dice que en este caso $\lambda = 1$ es estable. Por otro lado, si $a > 0$, entonces $f(\lambda) < 0$ en un pequeño intervalo de la forma $]1-\delta, 1[$, mientras que $f(\lambda) > 0$ en un intervalo de la forma $]1, 1+\delta[$, para algún $\delta > 0$ pequeño. Esto dice que, cuando $a > 0$, $\lambda = 1$ es inestable. Por último, si $a = 0$, entonces $f(\lambda) = -(1 - \lambda)^4$ tiene el mismo signo a ambos lados de $\lambda = 1$. En este caso $\lambda = 1$ no es estable ni inestable.

4.- Use variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación

$$(1 - t^2)y'' + 4ty' - 6y = (t^2 - 1)^2.$$

Para encontrar soluciones de la homogénea use series de potencias.
Solución: Primero encontramos dos soluciones de la ecuación homogénea usando series de potencias. Para esto suponemos que

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \;\; y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \;\; \text{y} \;\; y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}.$$

Entonces queremos que

$$\begin{aligned}
0 &= (1-t^2)y'' + 4ty' - 6y \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k - 6\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} t^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k - 6\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \\
&= 2a_2 + 6a_3 t + 4a_1 t - 6a_1 t - 6a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k(k-1) - 4k + 6)a_k\right) t^k \\
&= (2a_2 - 6a_0) + (6a_3 - 2a_1)t + \sum_{k=2}^{\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k^2 - 5k + 6)a_k\right) t^k.
\end{aligned}$$

Esto nos da las relaciones siguientes:

$$a_2 = 3a_0, \quad a_3 = \frac{a_1}{3} \quad \text{y} \quad a_{k+2} = \frac{(k-2)(k-2)a_k}{(k+2)(k+1)}.$$

De aquí obtenemos que $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, y que $a_k = 0$ para todo $k \geq 4$. Entonces tenemos dos soluciones independientes que son de hecho polinomios:

$$y_1(t) = 1 + 3t^2 \quad \text{y} \quad y_2(t) = \frac{t^3}{3} + t.$$

Con esto podemos usar variación de parámetros. Esto dice que buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(t) = \alpha_1(t)y_1(t) + \alpha_2(t)y_2(t),$$

donde α_1 y α_2 son funciones que satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix},$$

donde $g(t) = (t^2-1)^2$ es el lado derecho de la ecuación. Usando la notación estandar $W(t) = y_1y_2' - y_2y_1'$, la solución de este sistema lineal se puede escribir de la sigueinte manera:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} -y_2(t)g(t) \\ y_1(t)g(t) \end{pmatrix}.$$

Ahora $y_1(t) = 1 + 3t^2$, $y_1'(t) = 6t$, $y_2(t) = \frac{t^3}{3} + t$, $y_2'(t) = t^2 + 1$. De este modo

$$W(t) = (1+3t^2)(t^2+1) - 6t\left(\frac{t^3}{3} + t\right) = t^2 + 1 + 3t^4 + 3t^2 - 2t^4 - 6t^2 = (t^2-1)^2.$$

Con esto obtenemos que

$$\alpha_1'(t) = \frac{-\left(\frac{t^3}{3} + t\right)}{1-t^2} = \frac{-t^3 + t}{3(1-t^2)} + \frac{4t}{3(t^2-1)} \quad \text{y entonces} \quad \alpha_1(t) = \frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(t^2-1),$$

y

$$\alpha_2'(t) = \frac{1+3t^2}{1-t^2} = \frac{4}{1-t^2} - 3 = 2\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) - 3 \quad \text{de donde} \quad \alpha_2(t) = 2\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 3t.$$

La solución particular que buscamos es

$$y_p(t) = \left(\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(t^2-1)\right)(1+3t^2) + \left(2\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 3t\right)\left(\frac{t^3}{3} + t\right).$$