Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2024

Interrogación 2 MAT1640

PAUTA

Instrucciones: Esta prueba consiste de 4 problemas, cada uno de 6 puntos, para un total de 24 puntos. La nota se obtiene como $\frac{P}{4}+1$ donde P es el puntaje obtenido.
Dispone de 2 horas para contestar las preguntas de esta prueba.

1. *a*) Una cierta matriz A satisface $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-2i \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5+\sqrt{2}i & 0 & 5-\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Escriba la solución general de $X' = AX$.

b) La solución general de un cierto sistema $X' = AX$ es

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Use variación de parámetros para encontrar una solución particular de

$$X' = AX + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Una solución:

a) Del enunciado se deduce que A es diagonalizable con D la matriz que contiene sus valores propios y P la matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Tenemos entonces que

la solución general es

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(2t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \right)$$
$$+ c_4 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(2t) \right)$$
$$+ c_5 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(2t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \right) + c_6 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(2t) \right)$$

b) Una matriz fundamental es

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{2t} & -1 \\ e^{2t} & 1 \end{bmatrix}$$

con inversa

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{e^{2t} + e^{2t}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, una solución particular es

$$\begin{aligned} X_p &= \Phi \int \Phi^{-1} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} dt \\ &= \Phi \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \Phi \int \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \Phi \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} te^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

a) **0,3 puntos** por cada solución LI del problema homogéneo.

b)
- Identificar matriz fundamental: **1 punto**.
- Calcular inversa: **1 punto**.
- Escribir como se calcula X_P: **0,2 puntos**.
- Calcular correctamente solución particular: **2 puntos**.

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

2. Encuentre la solución general de $X' = AX + F$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Una solución:

Para encontrar la solución del problema homogéneo podemos usar valores propios o matriz exponencial.

Usando valores propios. El polinomio característico es $(\lambda - 4)^3$, asi que el único valor propio es $\lambda = 4$. Tenemos

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que el espacio propio es de dimensión dos, con vectores base

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Buscamos ahora un tercer vector propio generalizado K_3. El sistema $(A-4I)K_3 = K_1$ es inconsistente, mientras que $(A - 4I)K_3 = K_2$ tiene solución

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución general del problema homogéneo es

$$X_c = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Usando matriz exponencial. Notemos que $A = 4I + N$ donde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N^2 = 0.$$

por lo tanto

$$e^{At} = e^{(4I+N)t} = e^{4It} e^{Nt} = e^{4t} I \left(I + Nt\right) = e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ te^{4t} & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

y podemos leer de las columnas de e^{At} que la solución general del problema homogéneo es

$$X_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar una solución particular X_p podemos usar variación de parámetros o coeficientes indeterminados.

Coeficientes indeterminados. Intentamos

$$X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Se obtiene la condición

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} = X_p' - AX_p = - \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 4a \\ a+4b+c \\ 4c \end{bmatrix} e^{-t} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5a \\ -a-5b-c \\ -5c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir

$$X_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Variación de parámetros. Elegimos matriz fundamental

$$\Phi = e^{4t} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con inversa

$$\Phi^{-1} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -t & 1 & -t \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} dt = \Phi \int e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \Phi e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Observación: un cálculo completamente analogo se obtiene usando $\Phi = e^{At}$ de modo que

$$\Phi = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi^{-1} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del problema no homogéneo es

$$X = X_c + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Asignación de puntaje:

- Identificar valor propio / Descomponer A en suma de matriz diagonal y nilpotente: **0,5 puntos**.
- Identificar dos vectores propios LI / Calcular $e^{t\lambda I}$ y e^{Nt}: **1 punto**.
- Identificar un vector propio generalizado / Calcular e^{At}: **0,5 puntos**.
- Escribir solución general del problema homogéneo (puede estar en la respuesta final): **0,2 puntos**
- Identificar matriz fundamental / Identificar forma de X_p: **0,5 puntos**.
- Calcular inversa / Reemplazar correctamente X_p en la ecuación: **1,5 puntos**.

- Calcular correctamente solución particular / Calcular correctamente coeficientes indeterminados: **1,5 puntos**.
- Escribir solución general de problema: **0,3 puntos**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

3. *a*) Una cierta EDO lineal de coeficientes constantes $Lu = 0$ tiene ecuación auxiliar (o característica)

$$(m+\sqrt{2})(m-1)^4(m-(2+i))^3(m-(2-i))^3 = 0.$$

Encuentre la solución general de $Lu = 0$.

b) Una solución de $x^2u'' - xu' + u = 0$ en $(0,\infty)$ es $u_1 = x$. Encuentre la solución general de

$$x^2u'' - xu' + u = x$$

en $(0,\infty)$.

Una solución:

a) Con la información dada es inmediato que la solución general es

$$u(x) = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^x + c_3xe^x + c_4x^2e^x + c_5x^3e^x$$
$$+ c_6e^{2x}\cos(x) + c_7e^{2x}\operatorname{sen}(x) + c_8xe^{2x}\cos(x) + c_9xe^{2x}\operatorname{sen}(x) + c_{10}x^2e^{2x}\cos(x) + c_{11}x^2e^{2x}\operatorname{sen}(x).$$

b) La EDO es equivalente en el intervalo indicado a

$$u'' - \frac{1}{x}u' + \frac{1}{x^2}u = \frac{1}{x}.$$

Calculamos una segunda solución u_2 linenalmente independiente

$$u_2 = u_1\int\frac{e^{-\int P dx}}{u_1^2}dx = x\int\frac{e^{\int\frac{1}{x}}}{x^2}dx = x\int\frac{1}{x}dx = x\ln x$$

y una solución particular u_p usando variación de parámetros

$$W = \det\begin{bmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1\end{bmatrix} = x\ln x + x - x\ln x = x$$
$$W_1 = \det\begin{bmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1\end{bmatrix} = -\ln x$$
$$W_2 = \det\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x}\end{bmatrix} = 1$$
$$y_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\ln x}{x} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$$
$$y_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = \ln x$$
$$u_p = y_1u_1 + y_2u_2 = -\frac{x}{2}(\ln x)^2 + x(\ln x)^2 = \frac{x}{2}(\ln x)^2.$$

Luego, la solución general es

$$u = c_1x + c_2x\ln x + \frac{x}{2}(\ln x)^2.$$

Asignación de puntaje:

a) **0,2 puntos** por cada solución LI del problema homogéneo.

b)
- Despejar segunda derivada (puede estar implícito): **0,5 puntos**.
- Calcular segunda solución LI: **1 punto**.
- Calcular W: **0,5 puntos**.

- Calcular W_1: **0,5 puntos**.
- Calcular W_2: **0,5 puntos**.
- Calcular correctamente y_1 y y_2: **0,25 puntos cada una**.
- Escribir solución general del problema: **0,3 puntos**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

4. Encuentre la solución de

$$u''' - 2u'' + u' = 40e^x \quad , \quad u(0) = 1 \quad , \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = 2.$$

Una solución:

La ecuación auxiliar es

$$0 = m^3 - 2m^2 + m = m(m-1)^2$$

de modo que la solución general del problema homogéneo es

$$u = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x.$$

Para encontrar una solución particular u_p podemos usar coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

Coeficientes indeterminados. Puesto que e^x duplica la solución del problema homogéneo asociado a $m = 1$ de multiplicidad 2, intentamos $u_p = ax^2e^x$. Calculamos

$$\begin{aligned} u_p' &= 2axe^x + ax^2e^x \\ u_p'' &= 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x \\ u_p''' &= 6ae^x + 6axe^x + ax^2e^x \end{aligned}$$

de modo que

$$u_p''' - 2u_p'' + u_p' = 6ae^x + 6axe^x + ax^2e^x - 4ae^x - 8axe^x - 2ax^2e^x + 2axe^x + ax^2e^x = 2ae^x$$

de donde obtenemos el requisito $2a = 40 \to a = 20$ y entonces $u_p = 20x^2e^x$.

Variación de parámetros. Calculamos

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{bmatrix} 1 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & xe^x + e^x \\ 0 & e^x & xe^x + 2e^x \end{bmatrix} = xe^{2x} + 2e^{2x} - xe^{2x} - e^{2x} = e^{2x} \\ W_1 &= \det \begin{bmatrix} 0 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & xe^x + e^x \\ 40e^x & e^x & xe^x + 2e^x \end{bmatrix} = 40e^x \left(xe^{2x} + e^{2x} - xe^{2x} \right) = 40e^{3x} \\ W_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & xe^x \\ 0 & 0 & xe^x + e^x \\ 0 & 40e^x & xe^x + 2e^x \end{bmatrix} = -40e^{2x}(1+x) \\ W_3 &= \det \begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 40e^x \end{bmatrix} = 40e^{2x} \\ y_1' &= \frac{W_1}{W} = \frac{40e^{3x}}{e^{2x}} = 40e^x \Rightarrow y_1 = 40e^x \\ y_2' &= \frac{W_2}{W} = \frac{-40e^{2x}(1+x)}{e^{2x}} = -40(1+x) \Rightarrow y_2 = -40\left(x + \frac{x^2}{2} \right) \\ y_3' &= \frac{W_3}{W} = \frac{40e^{2x}}{e^{2x}} = 40 \Rightarrow y_3 = 40x \\ u_p &= y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 = 40e^x - 40xe^x - 20x^2e^x + 40x^2e^x = 40e^x + 20x^2e^x. \end{aligned}$$

Observemos que $40e^x$ es solución del problema homogéneo, por lo que podemos eliminarla de u_p.

Concluimos entonces que la solución general es

$$u = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + 20x^2 e^x.$$

Para encontrar las valores de las constantes resolvemos

$$\begin{aligned} 1 &= u(0) = c_1 + c_2 \\ -1 &= u'(0) = c_2 + c_3 \\ 2 &= u''(0) = c_2 + 2c_3 + 40 \end{aligned}$$

de donde $c_1 = -35$, $c_2 = 36$, $c_3 = -37$. Luego, la solución del PVI es

$$u = -35 + 36e^x - 37xe^x + 20x^2e^x.$$

Observación: también es posible usar el método de aniquiladores para resolver el problema. Puesto que $D-1$ aniquila $40e^x$, la solución del problema es miembro de la familia de soluciones de $D(D-1)^3u = 0$. Es decir, la solución debe ser de la forma

$$u = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + c_4x^2e^x.$$

Como arriba, poniendo u en la ecuacion se descubre $c_4 = 20$, y con las condiciones iniciales se deduce $c_1 = -35$, $c_2 = 36$, $c_3 = -37$.

Asignación de puntaje:

- **0,5 puntos** por cada solución LI del problema homogéneo (pueden obtenerse por método de aniquiladores).
- Calcular matrices W: **0,25 puntos cada una** / Identificar forma de u_p: **1 punto** / Identificar aniquilador de e^x: **1 punto**.
- Calcular correctamente funciones y **0,4 puntos cada una** / Reemplazar correctamente u_p en la ecuación: **1,2 puntos** / Encontrar solución general de $D(D-1)^3u = 0$: **1,2 puntos**.
- Calcular correctamente solución particular / Calcular correctamente coeficientes indeterminados: **1 punto**.
- Calcular valores de las constantes arbitrarias: **1 punto**.
- Escribir solución del PVI: **0,3 puntos**.

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos** o **0,4 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*