MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 6)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la clase anterior

Resolución de EDO's mediante sustitución.

- Objetivo: introducir una nueva variable dependiente que satisfaga una EDO simple (lineal o variable separable)

- Estudiamos 3 de 4 tipos de EDO's de 1er orden que poseen sustituciones (respectivas) conocidas.

Nombre	EDO	Sustitución
	$y' = F(ax + by + c)$	$v = ax + by + c$
Homogéneas	$y' = F(\frac{y}{x})$	$v = y/x$
Bernoulli	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$v = y^{1-n}$
Riccati	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$	?

- Pasos del método de sustitución:
  1) Determinar tipo de EDO y la sustitución correspondiente.
  2) Derivar la sustitución para relacionar v' con y'.
  3) Utilizar la sustitución, la ecuación del paso 2), y la EDO original para encontrar una nueva EDO para v.
  4) Resolver la EDO de $v(x)$
  5) Encontrar la solución $y(x)$

Ejemplo de resolución de ecuación de Bernoulli

- $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$

La ecuación se reescribe como:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3} \quad \rightarrow \quad n = 4/3$$

Sustitución:

$$v = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-\frac{1}{3}}$$

Notamos que:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\frac{dy}{dx}$$

EDO para v:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1$$

Solución general:

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}$$

Def. Una EDO de 1er orden se dice **de Riccati** si se puede escribir de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$$

¿Cómo simplificamos esta ecuación?

Supongamos que conocemos una solución particular $y_1(x)$.

Sustitución: $y = y_1 + \dfrac{1}{v}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dv}{dx} + \left(B(x) + 2A(x)y_1(x)\right)v = A(x)}_{\text{EDO lineal}}$$

Ejemplo de resolución de ecuación de Riccati

- $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

Solución particular:

$$y_1(x) = x$$

Sustitución:

$$y = x + \frac{1}{v}$$

Notamos que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

EDO para v:

$$\frac{dv}{dx} = -1$$

Solución general:

$$v = -x + C \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{C - x}$$

Recordemos que, dada una EDO de 1er orden, en ocasiones lo mejor que podemos obtener es una solución $y(x)$ definida implícitamente:

$$F(x, y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Si derivamos con respecto a x (y por regla de la cadena) recuperamos la EDO:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx} = 0}_{y(x) \text{ es solución de esta EDO de 1er orden}}$$

Supongamos que ahora tenemos una EDO escrita de la forma:

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Luego, si existe una función $F(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad \text{y} \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

entonces la EDO tiene soluciones definidas implícitamente por

$$F(x, y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Def. Una EDO de 1er orden se dice que es **exacta** si se escribe de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

y además existe $F(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \quad \text{y} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Obs. Dada una EDO exacta, si logramos identificar la función F hemos resuelto automáticamente la EDO:

$$\text{Solución general (implícita):} \quad F(x,y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Notación: Es usual escribir la ecuaciones exactas en su forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Esto ya que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF$ (el diferencial de F) y por lo tanto

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = C$$

- ¿Cómo sabemos que una EDO es exacta (sin calcular F)?
- Sabiendo que una EDO es exacta, ¿Cómo calculamos F?

Para la primera pregunta, notemos que si

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta con función F, entonces

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) \\ N(x,y) &= \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Se puede en verdad demostrar que:

Teorema. [Criterio de exactitud]
Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas con derivadas parciales de 1er orden continuas para $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$, entonces la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta en $(a,b) \times (c,d)$ **si y sólo si** $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Ejemplos.

1) $y^3dx + 3xy^2dy = 0 \quad \longrightarrow \quad$ EDO exacta

2) $ydx + 3xdy = 0 \quad \longrightarrow \quad$ es equivalente a la EDO en 1) pero no es exacta

Obs. La *exactitud* de una EDO depende de como esté escrita

3) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0 \quad \longrightarrow \quad$ EDO exacta

Recordemos la segunda pregunta

- Sabiendo que una EDO es exacta, ¿Cómo calculamos F?

Obs. Si calculamos $F(x, y)$, sabemos que la solución general de la EDO satisface

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Explicaremos el método mediante un ejemplo:

$$\underbrace{(6xy - y^3)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(4y + 3x^2 - 3xy^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0$$

1) Integramos $M(x,y) = \partial_x F(x,y)$ con respecto a x:

$$F(x,y) = \int (6xy - y^3)dx = 3x^2y - xy^3 + \underbrace{g(y)}_{\text{ctte. de integración que depende de } y}$$

2) Para calcular $g(y)$ derivamos con respecto a y, e igualamos a $N(x,y)$:

$$\partial_y F(x,y) = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) \;=\; \underbrace{4y + 3x^2 - 3xy^2}_{N(x,y)} \;\Rightarrow\quad g'(y) = 4y$$

3) Integramos con respecto a y para encontrar $g(y)$:

$$g'(y) = 4y \quad\Rightarrow\quad g(y) = 2y^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

4) Finalmente escribimos $F(x,y)$:

$$F(x,y) = 3x^2y + xy^3 + 2y^2 + C_1$$

Luego, la solución general a la EDO se define implícitamente como:

$$3x^2y + xy^3 + 2y^2 = \underbrace{C}_{\text{la ctte. } C_1 \text{ es absorbida por } C}$$

2 sustituciones específicas para EDO's de segundo orden

Def. Una EDO de 2do orden, $F(x, y, y', y'') = 0$, se dice **reducible** si ocurre algúna de las siguientes condiciones:

a) no depende explícitamente de y, es decir, $F(x, y', y'') = 0$,

b) no depende explícitamente de x, es decir, $F(y, y', y'') = 0$

¿Cómo resolvemos estas EDO's? $\longrightarrow$ Sustitución: $p = y'$

a) Para resolver $F(x, y', y'') = 0$: $\quad p = y' \quad \Rightarrow \quad p' = y''$

Luego la EDO para p es

$$\underbrace{F(x, p, p') = 0}_{\text{EDO de 1er orden}} \quad \longrightarrow \quad \text{Solución general:} \quad p(x, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, volviendo a la ecuación original:

$$\text{Solución general de la EDO:} \quad y(x) = \int y'(x)dx = \underbrace{\int p(x, C_1)dx}_{\text{depende de 2 constantes, } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

b) Para resolver $F(y, y', y'') = 0$:

$$p = y' \quad \Rightarrow \quad p' = y'' \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = p\frac{dp}{dy}$$

luego la EDO para p es

$$\underbrace{F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0}_{\text{EDO de 1er orden para } p \text{ como función de } y} \quad \longrightarrow \quad \text{Solución general:} \quad p(y, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, volviendo a la variable original y:

$$p(y, C_1) = \frac{dy}{dx} \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{dy}{p(y, C_1)} \quad \longrightarrow \quad x(y) = \underbrace{\int \frac{1}{p(y, C_1)} dy}_{\text{depende de 2 constantes, } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Si $P(y, C_1)$ es antiderivada de $\frac{1}{p(y, C_1)}$ entonces:

$$\text{Solución general (implícita):} \quad x(y) = P(y, C_1) + C_2.$$

Ejemplos.

1) $xy'' + 2y' = 6x$

Observamos que no aparece la variable (dependiente) y

Solución general:

$$y(x) = x^2 + \frac{C_1}{x} + C_2$$

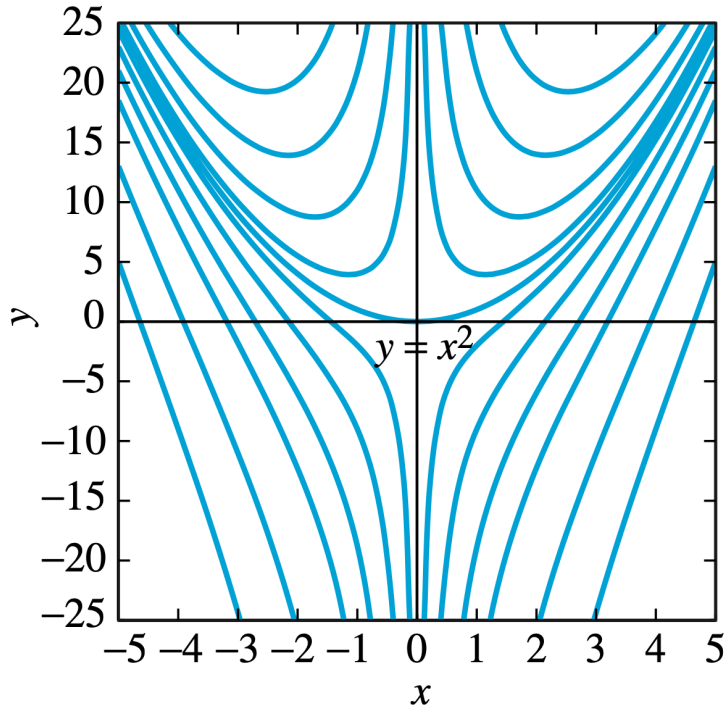


FIGURA 1.6.8. Curvas solución de la forma $y = x^2 + \frac{C_1}{x}$ para $C_1 = 0, \pm 3, \pm 10, \pm 20, \pm 35, \pm 60, \pm 100.$

2) $yy'' = (y')^2$

Observamos que no aparece
la variable (independiente) x

Solución general (implícita):

$$C_1 x = \ln|y| + C_2$$

Solución general (explícita):

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

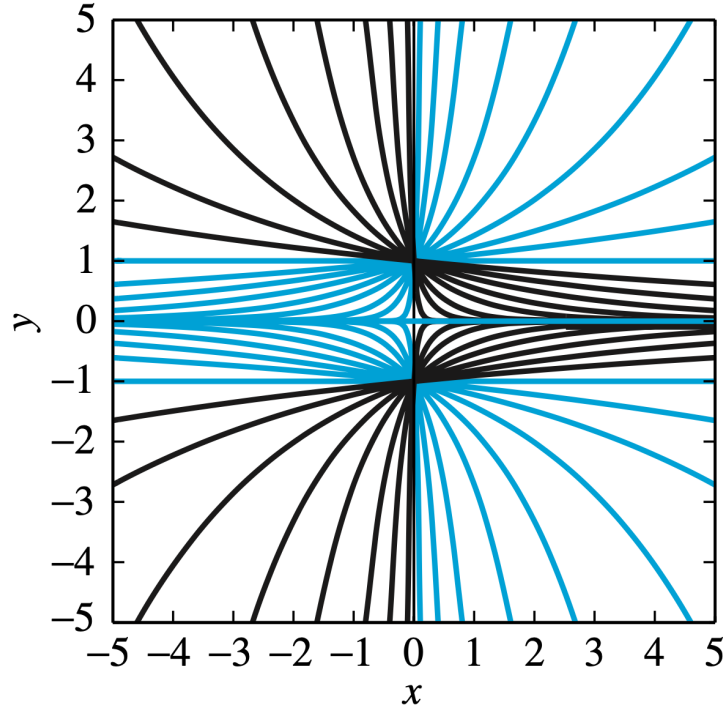


FIGURA 1.6.9. Curvas solución $y = Ae^{Bx}$ con $B = 0$ y $A = 0, \pm 1$ son las rectas horizontales $y = 0, \pm 1$. Las curvas exponenciales con $B > 0$ y $A = \pm 1$ están en gris, y aquellas con $B < 0$ y $A = \pm 1$ son negras.