Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 5

Ecuaciones diferenciales de orden superior:

1. Determine si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes en todo $\mathbb{R}$

   (a) $f(x) = 2x, \quad g(x) = 3x^2, \quad h(x) = 5x - 8x^2.$

   (b) $f(x) = 17, \quad g(x) = \cos^2(2x), \quad h(x) = 4\sin^2(x)\cos^2(x).$

   (c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = e^{3x}.$

   (d) $f(x) = x, \quad g(x) = xe^x, \quad h(x) = x^2e^x.$

2. Los siguientes ejemplos demuestran que la superposición de soluciones usualmente no se cumple para ecuaciones diferenciales no lineales:

   (a) Muestre que $y = 1/x$ es una solución de $y' + y^2 = 0$, pero que si $c \neq 0$ y $c \neq 1$, entonces $y = c/x$ no es una solución.

   (b) Compruebe que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$, pero que si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es solución.

   (c) Demuestre que $y_1 \equiv 1$ y $y_2 = \sqrt{x}$ son soluciones de $yy'' + (y')^2 = 0$, pero que su suma $y + y_1 = y_2$ no es solución.

3. Muestre que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son dos soluciones diferentes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, y$ que ambas satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 0 = y'(0)$. Explique por qué esta evidencia no contradice el teorema de existencia y unicidad.

4. (a) Considere la ecuación diferencial lineal

   $$y'' + py' + qy = f(x)$$

   con $y_p(x)$ una solución particular. Demuestre que $y(x)$ es solución de la ecuación homogénea si y sólo si existe una solución $y_c(x)$ del problema homogéneo asociado tal que $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$.

   (b) Con $y_p(x) = 1$ e $y_c(x) = \alpha\cos x + \beta\,\mathrm{sen}\,x$, encuentre una solución de $y'' + y = 1$ que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = -1 = y'(0)$.

Solución General de una EDO homogénea

5. Muestre que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son dos soluciones diferentes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, y$ que ambas satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 0 = y'(0)$. Explique por qué esta evidencia no contradice el teorema de existencia y unicidad.

6. (a) Demuestre que $y_1 = x^3$ y $y^2 = |x^3|$ son soluciones linealmente independientes en toda la recta real de la ecuación $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$.

   (b) Verifique que $W(y_1, y_2)$ es idénticamente cero. ¿Por qué esta evidencia no contradice el teorema del wronskiano visto en clases?

7. Sean $y_1(x), y_2(x)$ soluciones de la EDO lineal $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ con A, B, C continuas y A no nulo.

   (a) Demuestre:
   $$A(x) = Ay_1y_2'' - Ay_2y_1''$$
   Usando lo anterior, encuentre la **fórmula de Abel**:
   $$W(x) = Ke^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}$$
   donde K es una constante.

   (b) Use el resultado anterior para encontrar una segunda solución a $y'' + 3y' + 2y = 0$ sabiendo que $y_1 = e^{-x}$ es una solución.

8. (a) Compruebe que
   $$y_1(t) = t\,\mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(2t)$$
   es una solución de la ecuación diferencial
   $$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2\left[2(t+1)^2 + 1\right]y = 0$$

   (b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial del item (a).