PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2019

INTERROGACIÓN 2
MAT1640

Problema 1 La funcion $y_1(x) = x$ es solución del problema homogéneo

$$x^2y'' - \left(x^2 + 2x\right) y' + (x+2)\, y = 0.$$

Encuentre la solución general de

$$x^2y'' - \left(x^2 + 2x\right) y' + (x+2)\, y = x^3$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

Solución. Primero observemos que, en el intervalo indicado, el problema es equivalente a

$$y'' - \left(1 + \frac{2}{x}\right) y' + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = x.$$

Por reducción de orden

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^x x^2}{x^2} dx = xe^x$$

es otra solución del problema homogéneo linealmente independiente de y_1. **(2 puntos)**

Usamos variación de parámetros para encontrar una solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. Tenemos

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & xe^x + e^x \end{vmatrix} = x^2e^x + xe^x - xe^x = x^2e^x \quad \textbf{(1 punto)}$$

por lo que

$$u_1' = -\frac{x^2e^x}{x^2e^x} = -1 \ , \ u_2' = \frac{x^2}{x^2e^x} = e^{-x} \quad \textbf{(1 punto)}$$

y tomamos

$$u_1 = -x \ , \ u_2 = -e^{-x}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Entonces, la solución general del problema es

$$y(x) = c_1x + c_2xe^x - x^2 - x. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Problema 2 Considere un sistema masa/resorte compuesto de una masa de 1 kilo y un resorte con constante del resorte $k = 2$. Suponga que el medio en el que se encuentra el sistema ofrece una fuerza de amortiguación (opuesta al movimiento) igual a dos veces la velocidad, y que se aplica una fuerza externa $f(t) = e^{\alpha t}\sin(t)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Encuentra la solución general del problema cuando $\alpha = 1$.

(b) Encuentra la solución general del problema cuando $\alpha = -1$.

Por 1 punto bonus para el problema, responda la siguiente pregunta: ¿Para qué valores de α la solución general es no acotada? Justifique.

Solución. (a) El sistema es descrito por la EDO

$$x'' + 2x' + 2x = e^t \sin(t).$$

La solución general del problema homogéneo es

$$x_c = e^{-t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\right). \quad \textbf{(1 punto)}$$

Buscamos una solución particular de la forma $x_p = e^t\left(A\sin(t) + B\cos(t)\right)$. Calculamos

$$\begin{aligned} x_p' &= e^t\left(A\sin(t) + B\cos(t)\right) + e^t\left(A\cos(t) - B\sin(t)\right) = e^t\left((A-B)\sin(t) + (A+B)\cos(t)\right) \\ x_p'' &= e^t\left((A-B)\sin(t) + (A+B)\cos(t)\right) + e^t\left((A-B)\cos(t) - (A+B)\sin(t)\right) \\ &= e^t\left(-2B\sin(t) + 2A\cos(t)\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_p'' + 2x' + 2x &= e^t\sin(t)\left(-2B + 2A - 2B + 2A\right) + e^t\cos(t)\left(2A + 2A + 2B + 2B\right) \\ &= e^t\sin(t)\left(4A - 4B\right) + e^t\cos(t)\left(4B + 4A\right). \end{aligned}$$

Luego, necesitamos

$$4A - 4B = 1\ ,\ 4B + 4A = 0 \quad \textbf{(1 punto)}$$

de donde $A = 1/8$, $B = -1/8$. Entonces, la solución general es

$$x(t) = e^{-t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\right) + \frac{1}{8}e^t\left(\sin(t) - \cos(t)\right). \quad \textbf{(1 punto)}$$

(b) Como ya tenemos la solución del problema homogéneo, solo debemos encontrar una solución particular. Como en este caso $f(t)$ es solución del problema homogéneo, buscamos

$$x_p = te^{-t}\left(A\sin(t) + B\cos(t)\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} x_p' &= e^{-t}\left(A\sin(t)+B\cos(t)\right)+t\left[-e^{-t}\left(A\sin(t)+B\cos(t)\right)+e^{-t}\left(A\cos(t)-B\sin(t)\right)\right] \\ &= e^{-t}\left(A\sin(t)+B\cos(t)\right)+te^{-t}\left[\sin(t)\left(-A-B\right)+\cos(t)\left(A-B\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_p'' &= -e^{-t}\left(A\sin(t)+B\cos(t)\right)+e^{-t}\left(A\cos(t)-B\sin(t)\right) \\ &\quad +e^{-t}\left[\sin(t)\left(-A-B\right)+\cos(t)\left(A-B\right)\right]-te^{-t}\left[\sin(t)\left(-A-B\right)+\cos(t)\left(A-B\right)\right] \\ &\quad +te^{-t}\left[\cos(t)\left(-A-B\right)-\sin(t)\left(A-B\right)\right] \\ &= e^{-t}\left[\sin(t)\left(-2A-2B\right)+\cos(t)\left(2A-2B\right)\right]+te^{-t}\left[2B\sin(t)-2A\cos(t)\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_p''+2x'+2x &= e^{-t}\sin(t)\left(t(2B-2A-2B+2A)-2A-2B+2A\right) \\ &\quad +e^{-t}\cos(t)\left(t(-2A-2B+2A+2B)-2B+2A+2B\right) \\ &= e^{-t}\sin(t)\left(-2B\right)+e^{-t}\cos(t)\left(2A\right). \quad \textbf{(1 punto)} \end{aligned}$$

Luego, $A=0$ y $B=-1/2$, y la solución general es

$$x(t)=e^{-t}\left(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)\right)-\frac{t}{2}e^{-t}\cos(t). \quad \textbf{(1 punto)}$$

Pregunta extra: La solución del problema homogéneo es siempre acotada. Sabemos por el punto anterior que si $\alpha=-1$ entonces la solución particular es acotada. Para todo otro valor de α la solución particular es de la forma $x_p=e^{\alpha t}\left(A\sin(t)+B\cos(t)\right)$. Estas soluciones son no acotadas si y solo si $\alpha>0$. Por lo tanto, la solución general es no acotada si y solo si $\alpha>0$.

Problema 3 Considere el problema de valores de frontera

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \ , \ y(1) = 0 \ , \ y(e^\pi) = 0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ un parámetro. Encuentre los valores propios y funciones propias del problema en $(0, \infty)$. Es decir, encuentre los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales del problema, e identifique explicitamente una solucion no trivial correspondiente.

Solución. La EDO es de Cauchy-Euler, asi que ponemos $y = x^m$ y obtenemos

$$x^m \left(m(m-1) + m + \lambda\right) = x^m \left(m^2 + \lambda\right) = 0.$$

Tenemos entonces tres casos.

Caso $\lambda < 0$: Por simplicidad ponemos $\lambda = -\alpha^2$ con $\alpha > 0$. Entonces la solución general es

$$y(x) = c_1 x^\alpha + c_2 x^{-\alpha}.$$

De $y(1) = 0$ obtenemos $c_1 = -c_2$. De $y(e^\pi) = 0$ obtenemos $c_2(-e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}) = 0$. Luego $c_1 = c_2 = 0$ y la única solución es la trivial. **(1 punto)**

Caso $\lambda = 0$: La solución general es

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln(x).$$

De $y(1) = 0$ obtenemos $c_1 = 0$, y de $y(e^\pi) = 0$ obtenemos $c_2\pi = 0$. Entonces $c_1 = c_2 = 0$ y la única solución es la trivial. **(1 punto)**

Caso $\lambda > 0$: Escribimos ahora $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha > 0$. Entonces la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos\left(\alpha \ln(x)\right) + c_2 \sin\left(\alpha \ln(x)\right). \quad \textbf{(1 punto)}$$

De $y(1) = 0$ obtenemos $c_1 = 0$. De $y(e^\pi) = 0$ obtenemos $c_2 \sin(\alpha\pi) = 0$. Si $c_2 = 0$ obtenemos la solución trivial. Pero la condición anterior también se cumple, para cualquier c_2, cada vez que $\alpha\pi = n\pi$ con n natural, es decir, cuando $\alpha = n$. Como $\lambda = \alpha^2$, los valores propios son

$$\lambda_n = n^2 \ , \ n \in \mathbb{N} \quad \textbf{(2 punto)}$$

con función propia

$$y_n(x) = \sin\left(n \ln(x)\right). \quad \textbf{(1 punto)}$$

Problema 4 Considere las siguientes EDOs:

(a) $(x^2+2)y'' + 3xy' - y = 0$,

(b) $y'' + \sin(x)y = 0$.

Notemos que $x_0 = 0$ es un punto ordinario en ambos casos. Para una, y solo una, de las EDOs anteriores encuentre dos soluciones linealmente independientes expresadas como series de potencias centradas en 0. Se considera suficiente que, para cada una de las soluciones, indique los primeros tres términos no nulos.

Solución.

(a) Ponemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y calculamos

$$\begin{aligned}
0 = (x^2+2)y'' + 3xy' - y &= \left(x^2+2\right)\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= 4c_2 + 12c_3 x + 3c_1 x - c_0 - c_1 x \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3c_n n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n \\
&= (4c_2 - c_0) + (12c_3 + 2c_1)\, x \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[c_n\left(n(n-1) + 3n - 1\right) + 2c_{n+2}(n+2)(n+1)\right] x^n. \quad \textbf{(3 puntos)}
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos

$$c_2 = c_0\frac{1}{4}\ ,\ c_3 = -c_1\frac{1}{6}\ ,\ c_{n+2} = -c_n\frac{n^2+2n-1}{2(n+2)(n+1)} \quad n \geq 2.$$

Calculamos las primeras cinco constantes

$$c_4 = -c_2\frac{7}{24} = -c_0\frac{7}{96}\ ,\ c_5 = -c_3\frac{14}{40} = c_1\frac{7}{120} \quad \textbf{(1 punto)}$$

de lo cual

$$y = c_0 + c_1 x + c_0\frac{1}{4}x^2 - c_1\frac{1}{6}x^3 - c_0\frac{7}{96}x^4 + c_1\frac{7}{120}x^5 + \cdots .$$

Con $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$ obtenemos la solución

$$y_1 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + \cdots \quad \textbf{(1 punto)}$$

mientras que con $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$ obtenemos la solución linealmente independiente

$$y_2 = 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{96}x^4 + \cdots . \quad \textbf{(1 punto)}$$

(b) Ponemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y observamos que

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
0 = y'' + \sin(x)y &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \\
&= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + 30c_6 x^4 + \cdots \\
&+ \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \cdots\right) \\
&= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + 30c_6 x^4 + \cdots + c_0 x + c_1 x^2 \\
&+ \left(c_2 - \frac{1}{6}c_0\right)x^3 + \left(c_3 - \frac{1}{6}c_1\right)x^4 + \cdots \\
&= 2c_2 + (6c_3 + c_0)\,x + (12c_4 + c_1)\,x^2 + \left(20c_5 + c_2 - \frac{1}{6}c_0\right)x^3 + \left(30c_6 + c_3 - \frac{1}{6}c_1\right)x^4 + \cdots .
\end{aligned}$$

(2 puntos)

De lo anterior obtenemos

$$c_2 = 0\ ,\ c_3 = -c_0\frac{1}{6}\ ,\ c_4 = -c_1\frac{1}{12}\ ,\ c_5 = c_0\frac{1}{120}\ ,\ c_6 = \frac{c_1 + c_0}{180} \quad \textbf{(1 punto)}$$

y entonces

$$y = c_0 + c_1 x - c_0\frac{1}{6}x^3 - c_1\frac{1}{12}x^4 + c_0\frac{1}{120}x^5 + \frac{c_1 + c_0}{180}x^6 + \cdots .$$

Con $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$ obtenemos la solución

$$y_1 = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots \quad \textbf{(1 punto)}$$

mientras que con $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$ obtenemos la solución linealmente independiente

$$y_2 = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots . \quad \textbf{(1 punto)}$$