Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2025

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 2

1. (a) **(3 ptos)** Resuelva la siguiente ecuación

$$y'' - y' - \mathrm{e}^{2x} y = \mathrm{e}^{3x},$$

transformándola en una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes usando la sustitución $t = \mathrm{e}^x$.

(b) **(3 ptos)** Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$x' = \sin(x^2),$$

y clasifíquelos determinando el diagrama de fase.

Solución.

(a) Sea $t = \mathrm{e}^x$ tal que $y(x) = z(t)$. Entonces

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^x z'(\mathrm{e}^x) \quad \text{y} \quad y''(x) = \mathrm{e}^x z'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{2x} z''(\mathrm{e}^x)$$

y en particular

$$\mathrm{e}^{2x} z''(t) - \mathrm{e}^{2x} z(t) = \mathrm{e}^{3x}$$

o sea

$$z'' - z = t,$$

que es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación homogénea asociada $z'' - z = 0$ tiene ecuación característica $r^2 - 1 = 0$ y solución general dada por

$$z(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para determinar una solución particular de la ecuación no homogénea $z'' - z = t$, podemos aplicar el método de variación de constantes o coeficientes indeterminados para obtener $z_p(t) = -t$ y por lo tanto la solución general es

$$z(t) = -t + \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Volviendo a la variable inicial, se obtiene la solución general de la ecuación diferencial inicial y está dada por

$$y(x) = -\mathrm{e}^x + \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(b) Sea $f(x) = \sin(x^2)$. Los ptos de equilibrio de la ecuación autónoma $x' = f(x)$ satisfacen $f(x) = 0$ y por lo tanto son todos los ptos de la forma $x_k = \pm\sqrt{k\pi}$ donde $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Tenemos

$$f'(x) = 2x\cos(x^2) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

y para clasificar los ptos de equilibrio, notamos que

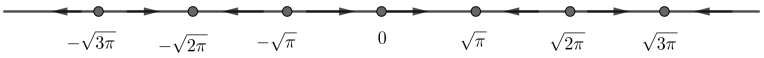
$$f'(x_k) = 2x_k\cos(x_k^2) = 2(-1)^k x_k.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, tenemos

- para $x_k = \sqrt{k\pi}$, $f'(x_k) = 2(-1)^k\sqrt{k\pi}$ y luego
  - si k es par entones $x_k = \sqrt{k\pi}$ es un equilibrio estable,
  - si k es impar entones $x_k = -\sqrt{k\pi}$ es un equilibrio inestable,

- para $x_k = -\sqrt{k\pi}$, $f'(x_k) = 2(-1)^{k+1}\sqrt{k\pi}$ y luego
  - si k es par entones $x_k = \sqrt{k\pi}$ es un equilibrio inestable,
  - si k es impar entones $x_k = -\sqrt{k\pi}$ es un equilibrio estable.

Para $x_0 = 0$, $f'(x) = 0$ pero la función f es par y no cambia su signo en el punto $x_0 = 0$ y por lo tanto este punto de equilibrio es inestable.
El siguiente diagrama de fase resume la clasificación.



Otra solución. Podemos analizar directamente el signo de la función f alrededor de los puntos de equilibrio para clasificarlos, sin usar la derivada.

- Para $x_k = \sqrt{k\pi}$, $k \geq 1$
  - si k es par entonces el signo de $\sin(x^2)$ cambia de $+$ a $-$ (estable).
  - si k es impar entonces el signo de $\sin(x^2)$ cambia de $-$ a $+$ (inestable).
- Para $x_0 = 0$, notamos que $\sin(x^2) > 0$ para $x \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ (inestable).

Asignación de puntaje

(a) - Asignar **(1 pto)** para determinar correctamente la nueva ecuación diferencial con coeficientes constantes $z'' - z = t$. Descontar (0.25 pto) si se comete a lo más un error.

- Asignar **(0.5 pto)** para resolver correctamente la ecuación homogénea $z - z = 0$ y expresar su solución general. Descontar (0.25 pto) si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1 pto)** para encontrar una solución particular $z_p(t) = -t$ (usando variación de parámetros o coeficientes indeterminados).
- Asignar **(0.5 pto)** para expresar la solución general de la ecuación diferencial inicial volviendo a la variable x y obtener

$$y(x) = -\mathrm{e}^x + \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} \quad \text{donde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(b)

- Asignar **(1 pto)** para determinar correctamente los puntos de equilibrio $x_k = \pm\sqrt{k\pi},\ k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Descontar (0.25 pto) si se comente a lo más un error.
- Asignar **(0.25 pto)** para clasificar $x_k = \sqrt{k\pi}$ para $k \neq 0$ par, como un equilibrio inestable.
- Asignar **(0.25 pto)** para clasificar $x_k = -\sqrt{k\pi}$ para k impar, como un equilibrio estable.
- Asignar **(0.25 pto)** para clasificar $x_k = \sqrt{k\pi}$ para $k \neq 0$ par, como un equilibrio estable.
- Asignar **(0.25 pto)** para clasificar $x_k = -\sqrt{k\pi}$ para k impar, como un equilibrio inestable.
- Asignar **(0.5 pto)** para clasificar $y_0 = 0$ como inestable (o semiestable) usando que f no cambia de signo en este caso. Descontar (0.25 pto) si no se justifica que f no cambia de signo en 0.
- Asignar **(0.5 pto)** para el diagrama de fase.

2. **(6 ptos)** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x,$$

sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución. Resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada dada por

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

Por la formula de Abel, determinamos una segunda solución y_2 tal que

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{\int \frac{x+1}{x} dx}}{(y_1(x))^2} dx$$

y luego

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x \int \frac{xe^x}{e^{2x}} dx \\ &= e^x \int xe^{-x} dx \\ &= e^x(-xe^{-x} - e^{-x}) \\ &= -x - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2(x+1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora, buscamos una solución particular para la ecuación no homogénea (escrita en su forma estándar)

$$y'' - \frac{x+1}{x} y' + \frac{y}{x} = xe^x,$$

por variación de parámetros de la forma

$$y_p(x) = \alpha_1(x)e^x + \alpha_2(x)(x+1),$$

donde $\alpha_1(x) = \int \frac{W_1}{W}$ y $\alpha_2(x) = \int \frac{W_2}{W}$ y tales que

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = -xe^x, \\ W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & x+1 \\ xe^x & 1 \end{vmatrix} = -x(x+1)e^x, \\ W_2(x) &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^x \end{vmatrix} = xe^{2x}. \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\alpha_1(x) = \int \frac{-x(x+1)\mathrm{e}^x}{-x\mathrm{e}^x} = \frac{x^2}{2} + x,$$
$$\alpha_2(x) = \int \frac{x\mathrm{e}^{2x}}{-x\mathrm{e}^x} = -\mathrm{e}^x,$$

y luego la solución particular es

$$y_p(x) = \Big(\frac{x^2}{2} - 1\Big)\mathrm{e}^x,$$

y la solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2(x+1) + \Big(\frac{x^2}{2} - 1\Big)\mathrm{e}^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Notamos que se puede expresar de la forma siguiente

$$y(x) = \tilde{c}_1\mathrm{e}^x + \tilde{c}_2(x+1) + \tfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

Observación. Podemos encontrar la solución particular por el método de coeficientes indeterminados de la forma $y_p(x) = P(x)\mathrm{e}^x$ donde P es un polinomio de grado 3 y después por identificación de coeficiente, se obtiene $P(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Asignación de puntaje

- Asignar **(1 pto)** para usar la formula de Abel.
- Asignar **(1 pto)** para obtener correctamente la segunda solución y_2.
- Asignar **(0.5 pto)** para expresar la solución general de la ecuación homogénea asociada.
- Asignar **(2.5 ptos)** para determinar una solución particular repartidos en
  - **(0.5 pto)** para el wronskiano W
  - **(0.5 pto)** para el wronskiano W_1
  - **(0.5 pto)** para el wronskiano W_2
  - **(0.5 pto)** para α_1
  - **(0.5 pto)** para α_2
- Asignar **(1 pto)** para expresar correctamente la solución general de la ecuación no homogénea inicialmente considerada $xy'' - (x+1)y' + y = x^2\mathrm{e}^x$.

3. (a) **(3 ptos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

(b) **(3 ptos)** Justifique la certeza o falsedad de la siguiente afirmación.
Las funciones $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ y $y_2(t) = \sin t$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

donde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Solución.

(a) La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ o sea $(r-1)^3 = 0$ donde $r = 1$ es solución con multiplicidad 3. Luego la solución general es

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x + c_3 x^2\mathrm{e}^x,$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) **Falsa.** Calculamos el wronskiano

$$W(\mathrm{e}^t, \sin t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & \sin t \\ \mathrm{e}^t & \cos t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t),$$

que se anula para los valores $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, las funciones no pueden ser soluciones LI de la ecuación $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ con p y q funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pto)** para escribir y resolver correctamente la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial. Descontar (0.25 pto) si se comete a lo más un error en el calculo de las raíces del polinomio característico.
- Asignar **(2 pto)** para determinar correctamente la solución general. Descontar (0.5 pto) si se comete a lo más un error.

(b)
- Asignar **(1 pto)** para responder falsa.
- Asignar **(1 pto)** para calcular el wronskiano.
- Asignar **(1 pto)** para justificar correctamente que las funciones no son LI en $\mathbb{R}$.

4. Una masa de 1 kg se suspende de un resorte cuya constante de elasticidad es 1 $\mathrm{N.m^{-1}}$. Supongamos que una fuerza de amortiguamiento, que es proporcional a la velocidad instantánea, actúa sobre el sistema y donde la constante de amortiguamiento es 2β.
   (a) Determine la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa.
   (b) Resuelva la ecuación y determine la función de desplazamiento $x(t)$ en términos del parámetro real β.
   (c) ¿Para cuales valores de β, el sistema satisface $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$?

Solución.

(a) La ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa es

$$x'' + 2\beta x' + x = 0.$$

(b) La ecuación diferencial $x''+2\beta x'+x = 0$ es homogénea con coeficientes constantes y el polinomio característico asociado es $p(r) = r^2 + 2\beta r + 1$.

- Si $\beta^2 > 1$ entonces tenemos dos raíces reales distintas $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(c_1 \mathrm{e}^{t\sqrt{\beta^2-1}} + c_2 \mathrm{e}^{-t\sqrt{\beta^2-1}}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\beta^2 = 1$ entonces tenemos una raíz real doble $r = -\beta$ y la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

o

$$x(t) = \mathrm{e}^{t}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\beta^2 < 1$ entonces tenemos dos raíces complejas conjugadas $-\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(c_1 \cos(t\sqrt{1-\beta^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{1-\beta^2})\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Usando las expresiones de movimientos descritas anteriormente, notamos que independientemente de las constantes c_1 y c_2

- si $\beta > 1$ y la solución general es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(c_1 \mathrm{e}^{t\sqrt{\beta^2-1}} + c_2 \mathrm{e}^{-t\sqrt{\beta^2-1}}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

- si $\beta = 1$ y la solución general es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

- si $0 < \beta < 1$ y la solución general es

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\Big(c_1 \cos(t\sqrt{1-\beta^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{1-\beta^2})\Big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Por lo tanto $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ para todo $\beta > 0$.

Asignación de puntaje

(a) Asignar **(0.5 pto)** para expresar correctamente la ecuación diferencial del movimiento.

(b)
- Asignar **(0.5 pto)** para resolver correctamente la ecuación característica y considerar los tres casos posibles según los valores de β.
- Asignar **(3 pto)** para expresar correctamente la solución general en cada caso donde se otorga (1 pto) para cada caso. Descontar (0.5 pto) si se comete a lo más un error.

(c)
- Asignar **(1.5 pto)** para determinar correctamente los valores de β que satisfacen $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ en cada caso. (0.5 pto) para cada caso. Descontar (0.5) si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pto)** para indicar que finalmente $\beta > 0$.