Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 10

Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

1. (a) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (b) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogénea de sal con agua. Denote por $x_i(t)$, $V_i(t)$ la cantidad de sal y el volumen de agua de cada tanque respectivamente. Al primer tanque entran 10 [L/s] de agua fresca, éste conduce 10 [L/s] al segundo tanque. Este otro estanque libera 10 [L/s] al tercero, y se extraen 10 [L/s] de este último.

   Si las condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{lll} V_1(0) = 30[L] & , \quad V_2(0) = 60[L] & , \quad V_3(0) = 30[L] \\ x_1(0) = 400[g] & , \quad x_2(0) = 200[g] & , \quad x_3(0) = 100[g] \end{array}$$

   Determine la concentración de sal en el tercer tanque pasados 5 minutos. Resuelva la concentración del segundo tanque en el momento en que el tercero se vacía.

3. Resolver

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

4. Consideremos la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

   Resuélvala transformándola en un sistema para luego resolver dicho sistema por alguno de los métodos matriciales visto en clases. Indique también si existe alguna solución particular $x(t)$, que satisfaga $\lim_{t \to -\infty} x(t) = \infty$

Repaso interrogación 2

5. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

encuentre la solución general de dicha ecuación.

6. Resuelva usando coeficientes indeterminados:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$$

7. Resuelva usando variación de parámetros

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$$

8. Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado descrito por

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 9x = 2\cos(3t) \quad ; \quad x(0) = 1 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Describa (en palabras) el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$.