PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

MAT1640 – ECUACIONES DIFERENCIALES
Examen Final

1. Considere la ecuación diferencial de la posición de una masa sujeta a un resorte y a una fuerza externa $f(t)$ tal que

$$x''(t) + 4x(t) = f(t),$$

con $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ y donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

(a) Resuelva el PVI y grafique la solución.
(b) ¿Se trata de una solución de PVI clasicá?

Solución.

(a) Notamos que la función f se puede expresar en término de la función escalón unitario tal que

$$f(t) = \cos(2t) - \cos(2t)\,\mathcal{U}(t-\pi).$$

Aplicando la transformada de Laplace y su propriedad de linealidad a la ecuación diferencial, obtenemos

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + 4\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-\pi)\},$$

Luego

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\,\mathrm{e}^{-\pi s},$$

donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces

$$(s^2+4)X(s) = s + \frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\,\mathrm{e}^{-\pi s},$$

o sea

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{s}{(s^2+4)^2}\,\mathrm{e}^{-\pi s},$$

Por transformada de Laplace inversa y usando propriedades de la transformada de Laplace, se obtiene la solución del PVI

$$x(t) = \cos(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t) - \frac{1}{4}(t-\pi)\sin(2(t-\pi))\,\mathcal{U}(t-\pi).$$

Por lo tanto

$$x(t) = \cos(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t) - \frac{1}{4}(t-\pi)\sin(2t)\,\mathcal{U}(t-\pi).$$

(b) El Teorema de existencia y unicidad no se aplica en este caso porque se trata de una función f discontinua.

Distribución de puntaje.

(a)
- Aplicar y calcular la transformada de Laplace, **1 puntos**.
- Obtener una ecuación algebraíca para $X(s)$, **0.5 punto**.
- Aplicar la transformada de Laplace inversa,
  - termino $\frac{s}{s^2+4}$, **0.5 punto**.
  - termino $\frac{s}{(s^2+4)^2}$, **1 punto**.
  - termino $\frac{s}{(s^2+4)^2}\ \mathrm{e}^{-\pi s}$, **1 punto**.
- Obtener la solución $x(t)$ del PVI, **0.5 punto**.
- Graficar la solución, **0.5 punto**.

(b) Justificar que el PVI no contradice el TEU porque no se aplica, pues la función f no es continua, o que la segunda derivada de f no existe en π. **1 punto**.

2. (a) Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t+x},$$

y determine su intervalo de existencia.

(b) Determine la solución general de la euación diferencial

$$y'' - 4y = 2x + \mathrm{e}^{-2x}.$$

Solución.

(a) Separando las variables resulta

$$e^{-x}x' = \mathrm{e}^{t},$$

de donde se obtiene la solución general

$$\mathrm{e}^{x(t)} = -\mathrm{e}^{t} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

o sea

$$x(t) = \log(C - \mathrm{e}^{t}), \quad C > \mathrm{e}^{t}.$$

Notamos que para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$, la solución del PVI sólo existe si

$$t < \log C \quad \text{con} \quad C = \mathrm{e}^{t_0} + \mathrm{e}^{-x_0}.$$

Distribución de puntaje.

- Resolver por separación de variables, **1.5 puntos**.
- Obtener la solución general implícita $\mathrm{e}^{x(t)} = -\mathrm{e}^{t} + C$ o obtener la solución explicita $x(t) = -\log(C - \mathrm{e}^{t})$ con la condición sobre C, **1 punto**.
- Expresar C en el caso de una condición inicial x_0, **0.5 punto**.

(b) La ecuación caractéristica asociada a la ecuación homogénea es $r^2 - 4 = 0$ tiene dos soluciones reales ± 2. Entonces la solución de la ecuación homogénea es

$$y_0(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-2x} + c_2\ \mathrm{e}^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

POr coeficientes indeterminados, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax + B + Cx\mathrm{e}^{2x},$$

y encontramos $A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ es dada por

$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-2x} + c_2\ \mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} + \frac{x}{4}\ \mathrm{e}^{2x}.$$

Distribución de puntaje.

- Resolver la ecuación homogénea, **1 punto**.
- Buscar una solución particular de la ecuación diferencial (coeficientes indeterminados o otro método), **1.5 puntos**.
- Expresar la solución general de la ecuación diferencial, **0.5 punto**.

Se puede resolver tanbipen por transformada de Laplace. En este caso, se aplica el puntaje siguiente

- Aplicar Laplace y obtener una ecuación algebraíca para Y, **1 punto + 0.5 punto**.
- Aplicar la transformada inversa de Laplace, **1 punto**.
- Expresar la solución general de le ecuación diferencial, **0.5 punto**.

3. Resolver la siguiente ecuación

$$\int_0^t y(t-\tau)(y(\tau)-1-\mathrm{e}^{\tau})\,\mathrm{d}\tau = 1-\mathrm{e}^{t} \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Solución. Identificamos el producto de convolución

$$y * (y-1-\mathrm{e}^{t}) = \int_0^t y(t-\tau)(y(\tau)-1-\mathrm{e}^{\tau})\mathrm{d}\tau$$

Sea $Y(s) = \mathcal{L}\}y(t)\}$ y aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación integrodiferencial para obtener

$$Y(s)^2 - Y(s)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s}-\frac{1}{s-1},$$

o sea

$$Y(s)^2 - Y(s)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s(s-1)} = 0.$$

Luego

$$\left(Y(s)-\frac{1}{s}\right)\left(Y(s)-\frac{1}{s-1}\right) = 0,$$

y por transformada inversa obtenemos dos soluciones

$$y(t) = 1 \quad \text{o} \quad y(t) = \mathrm{e}^{t},\ t \geq 0.$$

Distribución de puntaje.

- Reconocer la convolución, **1 punto**.
- Aplicar la transformada de Laplace, **1 punto**.
- Obtener una ecuación algebraíca para $Y(s)$, **1 punto**.
- Llegar a $Y(s) = \frac{1}{s}$ o $Y(s) = \frac{1}{s-1}$, **1 punto**. (**0.5 +0.5**).
- Aplicar la transformada de Laplace inversa, **1 puntos**.
- Obtener las dos soluciones, **1 puntos** (**0.5 punto** por cada solución).

4. Se considere la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad t \neq 0.$$

(a) ¿Para qué valores de t puede ser $\Phi(t)$ matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales?

(b) Construye este sistema.

Solución.

(a) Calculamos

$$\det \Phi(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \cos\left(\frac{\pi}{t}\right).$$

$\Phi(t)$ será una matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea si está invertible entonces si

$$\frac{\pi}{t} \notin \{k\pi, (k + \frac{1}{2}\pi \ , k \in \mathbb{Z}\},$$

o sea para

$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{2}{2k+1}, \frac{1}{k}\right).$$

(b)

$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{t^2}\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{t}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\ \text{cotan}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\ \tan\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego el sistema satisfacho por $\Pi(t)$ es

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\ \text{cotan}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\ \tan\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t).$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Calcular $\det \Phi(t)$, **1 punto**.
- Obtener la condición de invertibilidad de la matriz $\Phi(t)$ y intervalos adecuados para t, **2 puntos**.

(b) Construir la matriz A calculando el producto $A = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$
- Calcular la matriz inversa $\Phi(t)^{-1}$, **1 punto**.
- Calcular la matriz derivada $\Phi'(t)$, **1 punto**.
- Obtener el sistema asociado a $\Phi(t)$, **1 punto**.