Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Facultad de Matemáticas, PUC

3 de Julio, 2013

Examen

1. **(1.0 pts)** Encontrar la solución general de la ecuación

$$y''(t) - 4y(t) = te^t.$$

Solucion:

La solucion general de la ecuación homogenea $y''(t) - 4y(t) = 0$ es

$$\alpha e^{2t} + \beta e^{2t}.$$

Nos falta encontrar una solucion de la ecuacion no homogenea. Podemos usar coeficientes indeterminados o variacion de parametros.

Usando coeficientes indeterminados buscamos una solucion de la forma

$$y(t) = ae^t + bte^t.$$

Substituyendo en la ecuacion e igualando coeficientes obtenemos

$$a = -\frac{1}{3} \text{ y } b = -\frac{2}{9}.$$

Por lo tanto la solucion general buscada es

$$y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{2t} - \frac{2}{9}e^t\frac{1}{3}te^t.$$

Tambien se puede hacer por variacion de parametros.

2. **(1.0 pts)** Encontrar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la solución del problema de valores iniciales

$$(1 - x^2)y''(x) + 2y(x) = 0$$
$$y(0) = a, \;\; y'(0) = b$$

sea un polinomio.

Solucion:

Resolvemos por series. Ponemos $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Substituyendo en la ecuacion y, despues de un cambio de indices, igualando coeficientes obtenemos la relacion de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{n-2}{n+2}a_{n+2}.$$

De las condiciones iniciales tenemos que

$$a_0 = a, \quad a_1 = b.$$

De aquí se deduce: Si $b = 0$, entonces para cualquier a la solucion es un polinomio de grado a lo mas dos. Si $b \neq 0$, entonces la serie tiene infinitos terminos no nulos y por lo tanto no es un polinomio.

En resumon: La solucion es un polinomio si y solo si $b = 0$.

3. **(1.0 pts)**

(a) **(0.6 pts)** ¿Para qué valores de $\alpha > 0$, el problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^\alpha, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tiene una solución única?

Solución: Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que el problema de valores iniciales

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0,$$

tiene solución única si f y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas y son continuas en una región R del plano $]X_0, X_1[\times]Y_0, Y_1[$ que contenga el punto (x_0, y_0). En nuestro caso,

$$f(x, y) = y^\alpha, \tag{0.1}$$

cinco

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha y^{\alpha-1}.$$

De aquí se ve de inmediato que para $\alpha > 0$ tenemos existencia y unicidad de soluciones en un interrvalo abierto que contiene 0.

(b) **(0.4 pts)** Resuelva la ecuación

$$(t^2 - xt^2)x' + x^2 + tx^2 = 0.$$

Solución: La ecuación puede ser escrita en la forma

$$x' = \frac{t+1}{t^2}\frac{x^2}{x-1},$$

que es de variables separables. Un cálculo simple muestra entonces que la solución $\varphi(t)$ queda expresada en forma implícita en la forma

$$\frac{1}{\varphi(t)} + \frac{1}{t} + \log\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) = 0.$$

$$tdx - xdt = \sqrt{t^2 + x^2}dt.$$

Haciendo el reemplazo $x = vt$, se tiene $x' = v + v't$ y la ecuación se transforma en

$$v' = \frac{1}{t}\sqrt{1 + v^2},$$

que se resuelve por el mtodo de variables separables. Se tiene así que la solución general de la ecuación propuesta es de la forma

$$\varphi(t) = \operatorname{senh}(\log(Ct)) = \frac{1}{2}\left(Ct - \frac{1}{Ct}\right).$$

4. **(1.0 pts)**

(a) **(0.25 pts)** Demuestre que si $f(t)$ tiene transformada de laplace $F(s)$, entonces la transformada de Laplace de $g(t) = tf(t)$ satisface

$$\mathcal{L}(g)(s) = -\frac{d}{ds}F(s).$$

Solución: 1.a.- Observemos que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Entonces

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} t f(t)\, dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -\frac{d}{ds}F(s).$$

Esto es lo que queremos probar.

(b) **(0.75 pts)** Encuentre la transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial

$$ty'' + y' + ty = 0$$

que también satisface $y(0) = 0$.

Solución: 1.b.- Usaremos la notación $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación, y usando la parte anterior, obtenemos que

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + sY(s) - y(0) - \frac{d}{ds}Y = 0.$$

Usamos ahora que $y(0) = 0$ y que $y'(0)$ es constante para obtener

$$-(s^2+1)\frac{dY}{ds}(s) - sY(s) = 0,$$

o bien

$$(s^2+1)\frac{dY}{ds}(s) + sY(s) = 0,$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden. Un factor integrante para la ecuación es $\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$. Multiplicando por este factor la ecuación se reduce a

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{1+s^2}Y(s)\right) = 0.$$

De aquí concluímos que $\sqrt{1+s^2}Y(s) = K$ es constante, y por tanto

$$Y(s) = \frac{K}{\sqrt{1+s^2}}.$$

5. **(1.0 pts)**

(a) **(0.66 pts)** Encuentre la solución general del sistema lineal $y' = Ay$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **(0.34 pts)** Encuentre una base del conjunto de soluciones $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ de este sistema que satisfacen $y_1(t) = y_2(t) = y_3(t)$.

Solución: 2.a.- primero observamos que el polinomio característico de la matriz es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3.$$

Con esto observamos que

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

pero $(A - \lambda I)^3 = 0$. Escogemos entonces un vector v_3 con $(A - \lambda I)^2 v_3 \neq 0$. Por ejemplo

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos

$$v_2 = (A - \lambda I)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$v_1 = (A - \lambda I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tres soluciones l.i. del sistema son

$$Y_1(t) = e^t v_1, \;\; Y_2(t) = e^t(tv_1 + v_2), \;\; Y_3(t) = e^t(t^2 v_1 + tv_2 + v_3).$$

La solución general del sistema es una combinación lineal arbitraria de estas soluciones.

Supongamos ahora que $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = y(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $Y' = AY$. Entonces

$$Y' = y' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = AY = y(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

porque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 1. Esto requiere que $y' = y$, o sea, $y(t) = Ce^t$, donde C es una constante arbitraria. Vemos entonces que

$$Y(t) = Ce^t v_1.$$

Esto dice que una base del conjunto de soluciones que buscamos es

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. **(1.0 pts)** Dos postes verticales se encuentran separados por una distancia de l metros, siendo el primero de altura a metros y el segundo de altura $a+h$ metros con $h>0$. Se coloca una cuerda que une las puntas de ambos postes, de densidad de masa uniforme de ρ kilos por metro. Determine la ecuación de la cuerda cuya longitud es la máxima permitida de modo que su punto más bajo no se encuentre a una altura menor que a metros. Encuentre la solución de tal ecuación.

Solución: Elegimos un sistema de coordenadas de modo que el eje horizontal Ox sea paralelo a la base de ambos postes, el eje vertical Oy pase por el poste de altura a, estando el origen O en su extremidad inferior. De este modo se tiene que el poste de altura $a+h$ tiene su base en la posición $(l,0)$ del plano, y su punta en la posición $(l,a+h)$. Si tomamos dos puntos $0\leq x_1\leq x_2\leq l$, escribiendo las ecuaciones de equilibro del trozo de cuerda comprendido entre estos dos puntos llegamos a,

$$H_{x_1}-H_{x_2}=0, \tag{0.2}$$ horizontal

$$V_{x_1}-V_{x_2}-g\rho\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=0, \tag{0.3}$$ vertical

donde (H_x,V_x) es la tensión de la cuerda en el punto x, siendo H_x su componente horizontal y V_x su componente vertical. Por la primera ecuación (0.2), concluímos que existe una constante H tal que,

$$H_x=H,$$

para todo $0\leq x\leq l$. Esto nos permite deducir que,

$$V_{x_1}-V_{x_2}=H\int_{x_1}^{x_2}y''(x)dx.$$

Reemplazando en la ecuación (0.3) llegamos a,

$$y''(x)=\frac{g\rho}{H}\sqrt{1+y'(x)^2}.$$

Esta es la ecuación que define la cuerda. Por los métodos de variables separables vemos que,

$$\operatorname{senh}^{-1}(y'(x))-\operatorname{senh}^{-1}(y'(0))=\frac{g\rho}{H}x.$$

Pero por la condición que exige que la cuerda debe ser aquella de largo máximo cuya altura mínima no sea menor que a, necesariamente debemos tener que $y'(0)=0$. Siendo $\operatorname{senh}(x)$ una función estrictamente creciente en los reales, su inversa $\operatorname{senh}^{-1}(x)$ está también definida en todos los reales y,

$$\operatorname{senh}^{-1}(0)=0.$$

Por lo tanto,

$$y'(x)=\operatorname{senh}\left(\frac{g\rho}{H}x\right).$$

Integrando nuevamente llegamos a,

$$y(x) = \frac{H}{g\rho}\cosh\left(\frac{g\rho}{H}x\right) + a - \frac{H}{g\rho},$$

que es la solución.