Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 2

1. Suponga que la población de lagartos $P(t)$, medida en meses, satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = aP^2 - bP, \tag{1}$$

donde a y b son constantes positivas. Recuerde que aP^2 representa la tasa de nacimientos y bP la tasa de muertes. Suponga que la población inicial de lagartos $P(0)$ es 100 y que la tasa de nacimientos y de muertes por mes en tiempo $t = 0$ son 10 y 9, respectivamente. Calcule la población umbral o población de equilibrio. Calcule la población de lagartos, $P(t)$, con la condición inicial $P(0) = 100$. ¿Qué pasa con la población cuando $t \to +\infty$?

Solución. La población umbral es $M = \dfrac{b}{a}$. Usando que $10 = aP(0)^2$ y $9 = bP(0)$, tenemos que

$$M = \frac{9P(0)}{10} = 90.$$

Usando separación de variables tenemos que la población de lagartos $P(t)$ con población inicial $P(0) = 100$ es igual a

$$P(t) = \frac{900}{10 - e^{0{,}09 \cdot t}}. \tag{2}$$

Luego, la población de lagartos es creciente y explota para $t = \dfrac{100}{9}\ln(10)$. Por lo tanto de acuerdo al modelo, cuando t tiende a $+\infty$ la población de lagartos no está definida pues explota antes en un tiempo finito.

Evaluación:

- 1 punto por calcular la población umbral.
- 3 puntos por calcular la solución con la condición inicial. Si llega a una solución que es algebraicamente equivalente a la solución de la pauta entonces tiene todo el puntaje. Si el procedimiento del cálculo de la solución está correcto pero se equivocó en algún cálculo menor, como por ejemplo un signo o algo aritmético, descontar 1 punto de los 3. Si el procedimiento del cálculo es correcto pero las equivocaciones lo llevan a calcular algo completamente diferente 0 puntos.
- 1 punto por notar que la solución explota o tiende a infinito.
- 1 punto por calcular el instante de tiempo en que la solución explota.

2. La siguiente ecuación diferencial modela una población de ardillas $A(t)$ medida en meses:

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}1\,A\left(1 - \frac{A}{100}\right)\left(\frac{A}{10} - 1\right). \tag{3}$$

Calcule y clasifique los puntos de equilibrio. ¿Qué pasa con la población en el largo plazo si la cantidad inicial de ardillas es 6?

Solución. Los puntos de equilibrio son $0, 100$ y 10. Sea $f(A)$ el lado derecho de la ecuación diferencial. Para clasificar los puntos de equilibrio hacemos una tabla de signos para $f(A)$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 10)$	$(10, 100)$	$(100, +\infty)$
$0{,}1\,A$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1 - \frac{A}{100}$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{A}{10} - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(A)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, 0 es un sumidero, 10 es una fuente y 100 es un sumidero.

Si la cantidad inicial de ardillas es 6 entonces como el lado derecho es negatico entre $(0, 10)$ tenemos que la solución es decreciente y tiende al punto de equilibrio 0 cuando t tiende a $+\infty$. Por lo tanto la población de ardillas se extingue en el largo plazo.

Evaluación:

- 0,5 por cada punto de equilibrio.
- 1 punto por clasificar cada punto de equilibrio.
- 1 punto por notar que la solución con población inicial 6 es decreciente y 0,5 puntos por decir que tiende al punto de equilibrio 0 cuando t tiende a infinito.

3. Determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$x''' + 6x'' + 9x' = 0$$

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$r^3 + 6r^2 + 9r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r+3)^2 = 0$$

que tiene por raíces a $r = 0$, con multiplicidad algebraica 1, y $r = -3$, con multiplicidad algebraica 2. Por lo anterior, las soluciones homogéneas linealmente independientes son:

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = e^{-3t} \quad \text{y} \quad x_3(t) = te^{-3t}$$

y su solución general es:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-3t} + c_3 te^{-3t}$$

siendo c_1, c_2 y c_3 constantes.

Evaluación:

- 1 punto por escribir la ecuación característica
- 0,5 por cada raíz.
- 1 punto por cada solución de la ecuación homogénea.
- 1 punto por la solución general.

4. Resuelva el problema con valor inicial

$$x'' - 2x' + 5x = 0$$
$$x'(0) = -1$$
$$x(0) = 1$$

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

que tiene por raíces a $r = 1 \pm 2i$, siendo i la unidad imaginaria. De lo anterior, se desprende que la solución general es:

$$x(t) = \Big(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)\Big)e^t$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales. Usando las condiciones iniciales tenemos que

$$c_1 = 1, \text{ y } c_2 = -1.$$

Por la tanto la solución al problema con valor inicial es $x(t) = \Big(\cos(2t) - \sin(2t)\Big)e^t$.

Evaluación:

- 1 punto por escribir la ecuación característica
- 0,5 por cada raíz.
- 1 punto por cada solución de la ecuación homogéneal.
- 2 puntos por resolver el PVI. Asignar solo un punto si se equivoca en el cálculo de las constantes.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos