Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre 2015

Ecuaciones Diferenciales * MAT1640

INTERROGACIÓN 1

11 de Abril 2016
RESOLUCIÓN

Problema 1
Calcule la solución del problema de valor inicial y explicite su intervalo máximo de existencia.

$$(1-x^2)y' + (x-1)y = 3x^2 + 2x - 1 \quad , \quad y(1/2) = 1$$

Solución. Para $x \neq \pm 1$ dividimos la ecuación por el factor $1/(1-x^2)$,

$$y' - \frac{1}{x+1}\, y = \frac{3x^2+2x-1}{1-x^2}\,.$$

Calculamos el factor de cuadratura $e^{\int p}$ con $p(x) = -\frac{1}{x+1}$.

$$\int p = -\ln|x+1| \Longrightarrow e^{\int p} = \frac{1}{|x+1|}$$

Por lo tanto la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{|x+1|}\, y\right) = \frac{3x^2+2x-1}{(1-x^2)|x+1|}\,.$$

La condición inicial está dada en el punto $x_0 = 1/2$, luego en una vecindad de x_0, la expresión $x+1>0$ luego $|x+1| = x+1$. Integrando se obtiene que

$$\frac{1}{x+1}\, y = C + \int^x \frac{3s^2+2s-1}{(s-s^3-s^2+1)}$$

Es decir, en una vecindad de $x_0 = 1/2$ la solución se representa de la siguiente forma:

$$y(x) = c(x+1) - (x+1)\ln((1-x^2)(x+1))\,.$$

Considerando la condición inicial se obtiene que

$$1 = y(1/2) = \frac{3C}{2} + \ln 2 \Longrightarrow C = \frac{2}{3} + 2\ln 3 - 3\ln 2.$$

Luego, la única solución del Problema de Valor Inicial es

$$y(x) = (\frac{2}{3} + 2\ln 3 - 3\ln 2)(x+1) - (x+1)\ln((1-x^2)(x+1))\,.$$

y está definida a lo más en el intervalo abierto $]-1,1[$.

Problema 2
Calcule la solución general de la ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

Solución. Versión 1
Notemos que la ecuación se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x + e^y} \Longrightarrow y' := \frac{dy}{dx} = \frac{e^y/e^x}{1 + e^y/e^x}\,.$$

Con la sustitución $u = \frac{e^y}{e^x}$ se tiene que

$$u'e^x + ue^x = e^y y' \Longrightarrow y' = u'u^{-1} + 1$$

donde $u' = \frac{du}{dx}$.

Consecuentemente la ecuación se transforma en una ecuación de variables separadas en la función $u := u(x)$

$$u'u^{-1} + 1 = \frac{u}{1+u} \Longrightarrow u' = -\frac{u}{1+u}$$

Usando que $u > 0$ e integrando se obtiene finalmentye que la solución general de la ecuación es

$$u + \ln|u| = -x + c \Longrightarrow y + \frac{e^y}{e^x} = C\,.$$

Solución. Versión 2

La ecuación es equivalente a

$$Mdx + Ndy = 0 \Longleftrightarrow e^y\,dx - (e^x + e^y)\,dy = 0$$

la cual no es exacta, pero se calcula un factor integrante: $\mu(x) = e^{-x}$ que al multiplicar la ecuación por $\mu(x)$ produce una ecuación exacta.

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \Longrightarrow e^{y-x}\,dx - (1 + e^{y-x})\,dy = 0$$

La solución general $F(x, y) = C$ se calcula a partir de $F_x = e^{y-x}$ y $F_y = -1 - e^{y-x}$.

$$F_x(x, y) = e^{y-x} \Longrightarrow F(x, y) = -e^{y-x} + C(y)$$

Luego,

$$F_y(x, y) = -e^{y-x} + C_y(y) = -1 - e^{y-x} \Longrightarrow C_y(y) = -1 \Longrightarrow C(y) = -y + k$$

Es decir,

$$F(x, y) = -e^{y-x} - y = C \Longleftrightarrow e^{y-x} + y = C$$

Problema 3

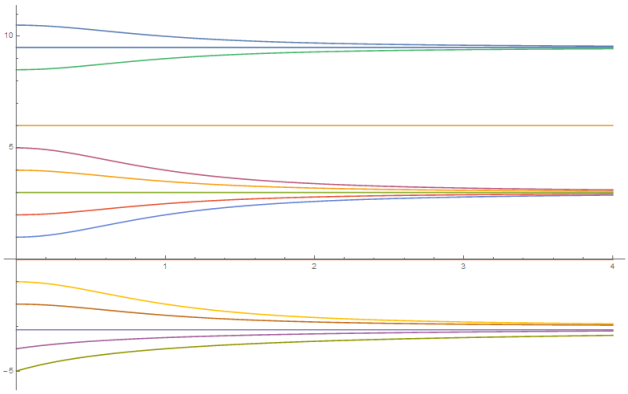
Determine todas las soluciones de equilibrio de la ecuación $y' = \text{sen}(y)$ y clasifique cuáles son estables y cuáles son inestables. Explique sus respuestas.

Solución.

La ecuación es autónomo por lo tanto los ceros de la función seno son las soluciones de equilibrio de la ecuación.

Puesto que los ceros de la función seno son $y_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se deduce que las funciones constante $y_k = k\pi$ son todas las soluciones de equilibrio.

Luego, la solución de equilibrio $y = 0$ es inestable puesto que el signo de la función seno en $]0, \pi[$ es positivo (creciente) y en $]-\pi, 0[$ es negativo (decreciente) y por lo tanto sus diagramas de face son del tipo:



Alrededor de $k\pi$ con k par, por ejemplo 2π , la función seno cambia de signo, lo que produce que estas soluciones de equilibrio son inestables, como se muestra en la figura.

En resumen, $y = 2k\pi$ es inestable para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $y = (2k+1)\pi$ es estable para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 4

Un resfriado se expande en una ciudad de población m. La función $r(t)$ representa la cantidad de individuos resfriados después de pasados t días y la ecuación logística que la modela es

$$r'(t) = cr(m-r)\,, \quad c > 0\,.$$

Cuando se descubrió la epidemia un sexto de la población estaba resfriado y después de 30 días un cuarto de la población. ¿ Cuánto tarda en resfriarse la mitad de la población ?

Solución.

Calculamos la solución general de la ecuación logística mediante el método de separación de variables

$$\frac{dr}{r(m-r)} = c\,m\,dt \Longrightarrow \int \frac{1}{r} + \frac{1}{m-r}\,dr = c\,m\,t + k \Longrightarrow \ln r - \ln(m-r) = cm\,t + k$$

Teniendo que

$$\ln\left(\frac{r}{m-r}\right) = cmt + k \Longrightarrow \frac{r}{m-r} = k_1 e^{c\,mt} \Longrightarrow r(t) = \frac{mk_1 e^{c\,mt}}{1 + k_1 e^{c\,mt}}$$

Utilizando la información dada sabemos que $r(0) = m/6$ es decir,

$$r(0) = \frac{mk_1 e^0}{1 + k_1 e^0} = \frac{m}{6} \Longrightarrow \frac{k_1}{1+k_1} = \frac{1}{6} \Longrightarrow k_1 = \frac{1}{5}$$

Además $r(30) = m/4$ es decir, donde $C_1 = mc$

$$r(30) = \frac{mk_1 e^{30\,C_1}}{1 + k_1 e^{30\,C_1}} = \frac{m}{4} \Longrightarrow \frac{k_1 e^{30\,C_1}}{1 + k_1 e^{30\,C_1}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow c = -\frac{1}{30m}\ln(3/5) = \frac{1}{30m}\ln(5/3)$$

Para estimar el tiempo que se tarda en resfriarse la mitad de la población resolvemos para t la ecuación

$$r(t) = \frac{m}{2} \Longrightarrow \frac{mk_1 e^{ct}}{1 + k_1 e^{ct}} = \frac{m}{2} \Longrightarrow t = \frac{\ln 5}{c} = 30m \cdot \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3}$$

Problema 5

Considere el problema de valor incial $y' = |xy|$ con condición inicial $y(-1) = 1$. Pruebe que tiene una solución definida en $]-\infty, \infty[$.

Solución.

La función $f(x, y) = |xy|$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y su derivada $D_y f(x, y)$ es continua en regiones que no contengan al eye $y = 0$. Recordar que valor absoluto no es derivable en cero.

En particular, el teorema de existencia y unicidad es válido en la región $R_0 = \{(x, y) : y > 0\}$, es decir, para todo punto $(a, p) \in R_0$ el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(a) = p$$

tiene una única solución definida en algún intervalo alrededor de a.

En particular, como $y(-1) = 1 > 0$ y $y(x)$ es continua en $x = -1$ se deduce que $(-1, 1) \in R_0$.

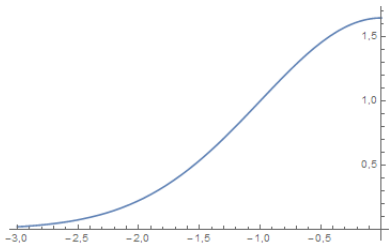
Luego existe una única solución y_1 definida en un intervalo $J_1 =]a_1, b_1[$ de la ecuación con $b_1 < 0$; la ecuación en J_1 es:

$$y' = |xy| = -xy \quad \text{con} \quad y(-1) = 1.$$

Resolviendo el correspondiente problema de valor inicial se obtiene que:

$$y_1(x) = \sqrt{e}\, e^{-(1/2)x^2} \quad \text{para todo } x \in J_1.$$

Claramente $y_1(x) = \sqrt{e}\, e^{-(1/2)x^2} > 0$ para todo x.



La curva solución se mantiene en la región de existencia y unicidad R_0 luego puede ser continuada a todo el semieje $]-\infty, 0]$.

En $x > 0$ resolvemos

$$y' = |xy| = x|y| \quad \text{con} \quad y(0) = \sqrt{e}\,.$$

De nuevo, $y(x) > 0$ en una vecindad de $x = 0$. Luego, la ecuación es $y' = xy$ con condición inicial $y(0) = \sqrt{e}$. Luego, la solución y_2 es

$$y_2(x) = \sqrt{e}\, e^{(1/2)x^2}$$

con y_2 definida en un intervalo $[0, b_2[$. Pero la curva $y_2(x) = \sqrt{e}\, e^{(1/2)x^2}$ se mantiene para todo $x > 0$ en la región R_0, luego la solución puede ser continuada a $[0, \infty[$.