PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2019

INTERROGACIÓN 3
MAT1640

Problema 1 Encuentre la solución general del los siguientes sistema de ecuaciones

(a)

$$x_1' = 3x_1 - 18x_2$$
$$x_2' = 2x_1 - 9x_2.$$

(b)

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \sec(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solución.

(a) La matriz de coeficientes, la cual llamamos A, tiene valores propios

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3. \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Observamos que

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que el espacio propio es de dimensión 1 con vector propio

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Buscamos un vector propio generalizado

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

tal que

$$(A + 3I)V = K.$$

Resolvemos el sistema aumentado

$$A + 3I = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

concluyendo $v_1 = 3v_2 + \frac{1}{2}$. Tomando $v_2 = 0$ obtenemos $v_1 = \frac{1}{2}$ y entonces

$$V = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Luego, la solución general es

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-3t}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

(b) La matriz de coeficientes A tiene valores propios

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i.$$

Correspondiente al valor propio $\lambda = i$ encontramos que

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que un vector propio es

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

y la solución del problema homogéneo es

$$X_c(t) = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(t) \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t) \right). \quad \textbf{(1 punto)}$$

Podemos elegir matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix}$$

con inversa

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Luego, una solución particular es

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi \int \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sec(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt \quad \textbf{(0,5 puntos)} \\ &= \Phi \int \begin{bmatrix} -\tan(t) \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln|\cos(t)| \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t)\ln|\cos(t)| + t\cos(t) \\ \cos(t)\ln|\cos(t)| + t\sin(t) \end{bmatrix}. \quad \textbf{(1 punto)} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la solución general del problema

$$\begin{aligned} X(t) = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(t) \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t) \right) \\ + \begin{bmatrix} -\sin(t)\ln|\cos(t)| + t\cos(t) \\ \cos(t)\ln|\cos(t)| + t\sin(t) \end{bmatrix}. \quad \textbf{(0,5 puntos)} \end{aligned}$$

Problema 2 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es nilpotente. Encuentre la matriz exponencial e^{At} y úsela para encontrar la solución del PVI

$$X' = AX \ , \ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculamos

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 \quad \textbf{(2 puntos)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(2 puntos)} \end{aligned}$$

En particular, la solución del PVI es

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t + \frac{1}{2}t^2 \\ 2 + t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t^2. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Observación: En caso de que se encuentre la matriz exponencial usando matrices fundamentales, asignar **(2 puntos)** por encontrar correctamente una matriz exponencial $\Phi(t)$, y **(2 puntos)** por calcular correctamente $e^{At} = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1}$.

Problema 3
(a) Considere el sistema autónomo

$$X' = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} X.$$

Clasifique el punto crítico $(0,0)$ en cuanto a tipo y estabilidad.
(b) La EDO

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta)$$

modela el movimiento de un péndulo de largo l con una masa adherida a su extremo libre, donde θ mide el ángulo que el pendulo hace con la vertical, y g es la fuerza de gravedad. Supongamos por simplicidad que $\frac{g}{l} = 1$. Definiendo $x = \theta$, $y = \theta'$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Encuentre los puntos críticos del sistema y clasifíquelos en cuanto a tipo y estabilidad.

Solución.

(a) La traza de la matriz es $\tau = -2$ y su determinante es $\Delta = 1$. Luego los valores propios son

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1.$$

Como hay solo un valor propio, $(0,0)$ puede ser tipo estrella o nodo impropio (aunque estable en cualquier caso pues $\lambda < 0$). Debemos verificar la dimensión del espacio propio. Si llamamos A la matriz de coeficientes del sistema, tenemos

$$A + 1I = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el espacio propio es de dimensión 1 **(1 punto)**, y el punto crítico es un **nodo impropio** y **asintóticamente estable (1 punto)**.

(b) Los puntos críticos del sistema son $(0, n\pi)$, con $n \in \mathbb{Z}$ **(0,5 puntos)**. Observamos que el Jacobiano está dado por

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$J(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{4(-1)^{n+1}}}{2} = \pm\sqrt{(-1)^{n+1}}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Luego, si n es impar, existen dos valores propios reales de signo distinto, por lo que $(0, n\pi)$ es un **punto silla** e **inestable (1 punto)**. Si n es par, entonces los valores propios son imaginarios

puros, por lo que no tenemos información concluyente. Sin embargo, notemos que

$$\partial_x(y) = 0 = -\partial_y(-\sin(x))$$

por lo que el sistema es **Hamiltoniano (0,5 puntos)**. Luego, si n es par, entonces el punto crítico $(0, n\pi)$ es un **centro** y entonces **estable (1 punto)**.

Problema 4
(a) Use la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x' + 5y &= 6 \\ \frac{1}{20}y' + y - x &= 0 \end{aligned}$$

sujeto a $x(0) = y(0) = 0$.
(b) Use la transformada de Laplace para resolver el PVI

$$y'' + y = f(t)\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq t < \pi \\ 1 + \cos(t) & \pi \leq t. \end{cases}$$

Solución.
(a) Al aplicar la transformada de Laplace obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} sX + 5Y &= \frac{6}{s} \\ \frac{s}{20}Y + Y - X &= 0. \quad \textbf{(1 punto)} \end{aligned}$$

Despejando por Y en la segunda ecuación obtenemos

$$Y(s) = \frac{20}{s+20}X$$

y reemplazando en la primera

$$X\left(s + \frac{100}{s+20}\right) = \frac{6}{s}\ ,\ X(s) = \frac{6(s+20)}{s(s+10)^2}.$$

Usando fracciones parciales,

$$X = \frac{6(s+20)}{s(s+10)^2} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+10)} - \frac{6}{(s+10)^2}$$

y por lo tanto

$$x(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-10t} - 6te^{-10t}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Por otro lado

$$Y(s) = \frac{20}{s+20}X = \frac{20}{s+20}\frac{6(s+20)}{s(s+10)^2} = \frac{120}{s(s+10)^2} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+10)} - \frac{12}{(s+10)^2}$$

y entonces

$$y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-10t} - 12te^{-10t}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

(b) Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2Y - s + Y = \mathscr{L}\left[(1+\cos(t))\,U(t-\pi)\right] = e^{-\pi s}\mathscr{L}\left[1+\cos(t+\pi)\right] = e^{-\pi s}\mathscr{L}\left[1-\cos(t)\right]$$
$$= e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

Por lo que

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

y entonces

$$y(t) = \cos(t) + \left[1 - \cos(t-\pi) - \frac{1}{2}(t-\pi)\sin(t-\pi)\right] U(t-\pi)$$
$$= \cos(t) + \left[1 + \cos(t) + \frac{1}{2}(t-\pi)\sin(t)\right] U(t-\pi). \quad \textbf{(1 punto)}$$