MAT 1640

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile
Interrogación 1
el 26 de marzo de 2012

Soluciones con puntaje

Problema 1. La dinámica de la población P de una especie obedece la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP(1000 - P) \tag{1}$$

donde $k > 0$ es una constante empírica. En el momento inicial $t = 0$ existen 500 individuos y dentro de un año existen 750 individuos de esta especie.
(i) Determine la población $P(t)$ en cualquier momento $t \geq 0$ habiendo encontrado el valor numérico de la constante k.
(ii) ¿Dentro de cuantos años desde el momento inicial la población alcanzará 90% de su valor asintótico $P_\infty := \lim_{t\to\infty} P(t)$?
Solución: (i) La ecuación (1) es separable **[0.5 pts]** y tiene dos soluciones singulares, $P(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 1000$, $\forall t \in \mathbb{R}$, que no satisfacen la condición inicial $P(0) = 500$. Supongamos que $P \neq 0$, $P \neq 1000$ y escribamos (1) en la forma

$$\frac{1}{P(1000 - P)} dP = k dt. \quad \textbf{[0.5pts]} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{P(1000 - P)} = \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{1000 - P}\right) \quad \textbf{[0.5pts]}$$

e integrando en (2), obtenemos

$$\ln\left|\frac{P}{1000 - P}\right| = k1000t + c$$

ó

$$\frac{P}{1000 - P} = c_1 e^{k1000t} \quad \textbf{[1pt]}$$

donde $c_1 \neq 0$ es una constante. Utilizando $P(0) = 500$, obtenemos

$$c_1 = 1. \quad \textbf{[0.5pts]}$$

Utilizando $P(1) = 750$, obtenemos

$$k = \frac{1}{1000} \ln 3. \quad \textbf{[0.5pts]}$$

Entonces,

$$\frac{P}{1000-P} = e^{t\ln 3} = 3^t,$$

es decir

$$P(t) = \frac{1000}{1+3^{-t}}. \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

(ii) Tenemos

$$P_\infty = \lim_{t\to\infty} P(t) = 1000 \quad [\mathbf{0.5pts}].$$

Estamos buscando $\tau > 0$ tal que $P(\tau) = 900$, es decir

$$\frac{1000}{1+3^{-\tau}} = 900. \quad [\mathbf{1pt}]$$

La solución de esta ecuación es

$$\tau = 2. \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

Problema 2. Resuelva explícitamente el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + (\operatorname{cotg} x)y = x, \\ y(3\pi/2) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Encuentre el intervalo máximo de definición de la solución de (3).
SOLUCIÓN: La ecuación en (3) es lineal **[0.5 pts]**, podemos elegir el factor integrante en vecindad del punto inicial $3\pi/2$ en la forma

$$\mu(x) = e^{\int \operatorname{cotg} x\, dx} = -\operatorname{sen} x. \quad [\mathbf{1pt}]$$

Multiplicando la ecuación en (3) por el factor integrante, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x\, y(x)) = x \operatorname{sen} x, \quad [\mathbf{1pt}]$$

es decir

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x + c\right) \quad [\mathbf{1.5pts}]$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Utilizando $y(3\pi/2) = 1$, obtenemos $c = 0$, es decir la solución del problema (3) es

$$y(x) = -x\operatorname{cotg} x + 1. \quad [\mathbf{1pt}]$$

El intervalo máximo de defínción de la solución y es $(\pi, 2\pi)$. **[1 pt]**

Problema 3. Resuelva las ecuaciones diferenciales:
(i)

$$2xy^2 + e^y + \left(2yx^2 + e^y x\right)\frac{dy}{dx} = 0; \tag{4}$$

(ii)

$$x\frac{dy}{dx} = xe^{-y/x} + y. \tag{5}$$

SOLUCIÓN: (i) Como

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + e^y) = 4xy + e^y = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + xe^y),$$

la ecuación (4) es exacta. **[1 pt]** Entonces existe función F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + e^y, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + xe^y. \tag{7}$$

[0.5 pts]
Integrando (6) con respecto a x, obtenemos

$$F(x, y) = x^2y^2 + xe^y + k(y) \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

donde k es una función desconocida. Derivando F con respecto a y y utilizando (7) obtenemos $k'(y) = 0$ y podemos elegir

$$k(y) = 0. \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

Entonces, la solución de (4) se define implícitamente por la ecuación

$$x^2y^2 + xe^y = c \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

donde c es una constante.
(ii) La sustitución $y = xv$ transfroma la ecuación (5) en

$$x\frac{dv}{dx} = e^{-v} \tag{8}$$

que es una ecuación separable **[1 pt]**. Escribiendo (8) en la forma

$$e^v dv = \frac{dx}{x} \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

e integrando, obtenemos

$$e^v = \ln|x| + c \quad [\mathbf{1pt}]$$

donde c es una constante. Entonces, la solución de (5) se define implícitamente por la ecuación

$$e^{y/x} = \ln|x| + c. \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

Problema 4. (i) Resuelva explícitamente el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -3t^2(1-y^2)^{1/2}, \\ y(0) = 1/2. \end{cases} \tag{9}$$

Verifique que la solución de (9) se puede extender a todo $\mathbb{R}$.
(ii) Consideremos el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -3t^2(1-y^2)^{1/2}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Construya explícitamente dos soluciones distintas del problema (10) definidas en todo $\mathbb{R}$. Interprete este resultado en términos del teorema de existencia y unicidad.
SOLUCIÓN: (i) La ecuación en (9) tiene solución

$$y(t) = \cos(t^3 + c), \quad t^3 + c \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad [\mathbf{1.5pts}] \tag{11}$$

donde c es una constante real y dos soluciones singulares

$$y(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$y(t) = -1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

Las soluciones (12) - (13) no satisfacen la condición inicial en (11) pero para satisfacerla podemos elegir $c = \pi/3$ y $k = 0$ en (11). Entonces, la función

$$y(t) = \cos(t^3 + \pi/3), \quad t^3 + \pi/3 \in (0, \pi), \quad [\mathbf{1pt}]$$

es solución del problema (9). Para extender esta solución a todo $\mathbb{R}$, podemos utilizar las soluciones singulares (12) – (13), definiendo

$$y(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad t^3 + \pi/3 \in (-\infty, 0], \\ \cos(t^3 + \pi/3) \quad \text{si} \quad t^3 + \pi/3 \in (0, \pi), \quad [\mathbf{0.5pts}] \\ -1 \quad \text{si} \quad t^3 + \pi/3 \in [\pi, \infty). \end{cases} \tag{14}$$

La función y y su derivada son continuas en $\mathbb{R}$ y satifacen la ecuación en (9). Además y satisface la condición inicial en (9). Por lo tanto la función definida en (14) es solución del problema (9).
(ii) La ecuación en (10) es la misma como en (9). Utilizando (11), (12) y (13) podemos elegir las dos soluciones, por ejemplo, de la manera siguiente

$$y_1(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad [\mathbf{0.5pts}]$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad t^3 \in (-\infty, 0], \\ \cos t^3 \quad \text{si} \quad t^3 \in (0, \pi), \quad [\mathbf{1.5pts}] \\ -1 \quad \text{si} \quad t^3 \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

La interpretación en términos del teorema de existencia y unicidad es la siguiente. La función $f(t, y) := -3t^2(1-y^2)^{1/2}$ admite extensión continua en vecindad del punto $(t, y) = (0, 1)$ pero su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = 3t^2 y(1-y^2)^{-1/2}$ no admite tal extensión en vecindad de este punto. Por lo tanto existe solución del problema (9) pero no se puede garantizar que esta solución es única. **[1 pt]**