Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 1

1. Sea $\mu = \mu(x)$ una función derivable para todo $x > 0$, y considere la ecuación diferencial exacta

$$\mu(x)(x+2)\sin(y)dx + \mu(x)x\cos(y)dy = 0, \quad x > 0, \tag{1}$$

a) Usando en **Criterio de Exactitud** demuestre que μ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{x+1}{x}\right)\mu.$$

Resuelva esta ecuación diferencial para μ, con $\mu(1) = e$.

Nota. La función μ es denominada **factor integrante**.

b) Para el μ encontrado en la parte anterior, resuelva la ecuación (1).

Solución.

a) Denotando

$$M(x,y) = \mu(x)(x+2)\sin(y) \quad \text{y} \quad N(x,y) = \mu(x)x\cos(y),$$

la ecuación diferencial satisface el Criterio de Exactitud (y por lo tanto es exacta) si

$$\partial_y M(x,y) = \partial_x N(x,y)$$

La igualdad anterior equivale a

$$\mu(x+2)\cos(y) = \frac{d\mu}{dx}x\cos(y) + \mu\cos(y),$$

por lo tanto, despejando $\dfrac{d\mu}{dx}$ se llega a la ecuación pedida

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(x+2)\cos(y)\mu - \cos(y)\mu}{x\cos(y)} = \left(\frac{x+1}{x}\right)\mu.$$

Para resolver la EDO que satisface μ utilizamos el método de separación de variables:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{x+1}{x}\right)\mu \quad &\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \\
&\Rightarrow \quad \ln(|\mu|) = x + \ln(|x|) + C \\
&\Rightarrow \quad \ln(|\mu|) = x + \ln(x) + C \quad (\text{ya que } x > 0) \\
&\Rightarrow \quad |\mu| = Axe^x \quad (\text{donde } A = e^C > 0) \\
&\Rightarrow \quad \mu(x) = \begin{cases} Axe^x & \text{si } \mu > 0 \\ -Axe^x & \text{si } \mu < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Lo anterior se puede resumir como

$$\mu(x) = Axe^x, \quad \text{para} \quad x > 0, \quad \text{con} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\mu(1) = e$ se tendrá que $A = 1$ y por tanto $\mu(x) = xe^x$.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** por calcular correctamente $\partial_y M$.
- Asignar **(0.5 ptos)** por calcular correctamente $\partial_x N$.
- Asignar **(0.5 ptos)** por escribir la igualdad $\partial_y M = \partial_x N$ remplazando en esta igualdad las expresiones correspondientes para $\partial_y M$ y $\partial_x N$
- Asignar **(0.5 ptos)** por demostrar que $\dfrac{d\mu}{dx} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\mu$. **Este puntaje se asignará únicamente si todos sus cálculos anteriores fueron realizados correctamente. No se asignará este puntaje si se usaron fórmulas que no hayan sido justificadas por el estudiante.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por resolver (explícita o implícitamente) la ecuación diferencial para μ.
- Asignar **(0.5 ptos)** determinar que $\mu(x) = xe^x$, dada la condición inicial $\mu(1) = e$. **Este puntaje se asignará únicamente si resolvió correctamente la ecuación para μ.**

b) Con $\mu(x) = xe^x$, la ecuación (1) se escribe como

$$x(x+2)e^x \sin(y)dx + x^2 e^x \cos(y)dy = 0.$$

Como sabemos que es exacta, debemos encontrar $F(x,y)$ tal que $\partial_x F = M$ y $\partial_y F = N$:

$$\begin{aligned}
& F(x,y) = \int x^2 e^x \cos(y)dy = x^2 e^x \sin(y) + g(x). \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{2xe^x \sin(y) + x^2 e^x \sin(y) + g'(x)}_{\partial_x F} = \underbrace{x(x+2)e^x \sin(y)}_{M} \\
\Rightarrow \quad & g'(x) = 0 \\
\Rightarrow \quad & g(x) = c \quad \text{(constante)} \\
\Rightarrow \quad & F(x,y) = x^2 e^x \sin(y) + C_1
\end{aligned}$$

Luego la solución a la ecuación diferencial (1) está dada implícitamente por la igualdad

$$x^2 e^x \sin(y) + C_1 = C_2,$$

o de manera equivalente,

$$x^2 e^x \sin(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, la solución general está dada por la formula

$$y(x) = \arcsin(Cx^{-2}e^{-x}).$$

Asignación de Puntaje

- Asignar **(1.5 ptos)** por integrar correctamente o bien M (respecto a x) o bien N (respecto a y) incluyendo la constante (no es necesario que quede explícito que la contante depende de una variable, solo que aparezca la constante). **Se descontará a este puntaje (0.5 ptos) en caso que NO aparezca la constante de integración.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por calcular correctamente o bien $\partial_y F$ (si el estudiante integró M) o bien $\partial_x F$ (si el estudiante integró N) obteniendo en la expresión la derivada de la constante respecto a la variable que corresponda. **No se asignará este puntaje si el estudiante NO declaró la constante en su función potencial**
- Asignar **(0.5 ptos)** por determina una ecuación diferencial para la constante de la función potencial obtenida al integral M o N, según corresponda.
- Asignar **(0.5 ptos)** por escribir la ecuación $F(x,y) = C$ siendo $F(x,y)$ la función potencial encontrada por el estudiante, libre de constantes, y C una constante independiente de x e y.

2. Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y' = \frac{10}{3}xy^{2/5}, \quad y(x_0) = y_0.$$

a) Determine todos los pares (x_0, y_0) donde el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una única solución definida en algún intervalo que contenga a x_0.

b) Calcule la solución general de la ecuación diferencial (sin considerar la condición inicial). ¿Existe alguna solución singular? si es así, indique cual es.

c) Tome ahora $x_0 = 0$ e $y_0 = -1$ en el PVI. ¿Cuál es el intervalo más grande donde la solución al PVI es única? De además 2 soluciones al PVI y que estén definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Las función $f(x, y) = \frac{10}{3}xy^{2/5}$ es continua en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mientras que $\partial_y f(x, y) = \frac{4}{3}xy^{-3/5}$ pierde su continuidad cuando $y = 0$. Luego, el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que el PVI.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

posee solución única, definida en torno a x_0, para todo par de valores de (x_0, y_0) tales que $y_0 \neq 0$.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** Por decir (escribir) que f es continua en $\mathbb{R}^2$. Este conjunto lo puede caracterizar de diferentes maneras, incluso en palabras.
- Asignar **(0.5 ptos)** Por decir (escribir) que f_y es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \,|\, y \neq 0\}$, siempre y cuando haya calculado correctamente f_y. Este conjunto lo puede caracterizar de diferentes maneras, incluso en palabras.
- Asignar **(0.5 ptos)** Por decir (escribir) que el "teorema de existencia y unicidad se cumple para condiciones iniciales (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$" o algo equivalente. **Este puntaje se asignará únicamente si el estudiante calculó correctamente f_y. Si el estudiante obtuvo este puntaje se considera que tiene esta parte del ejercicio correcta, y se le debe asignar todo el puntaje, independiente si obtuvo el puntaje anterior: (1.5 ptos) correspondiente al puntaje total de esta parte del ejercicio**.

b) Resolvemos la ecuación mediante separación de variables:

$$\begin{aligned} y' = \frac{10}{3}xy^{2/5} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y^{2/5}} = \frac{10}{3}xdx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^{2/5}} = \int \frac{10}{3}xdx \\ &\Rightarrow \quad \frac{5}{3}y^{3/5} = \frac{5}{3}x^2 + C \\ &\Rightarrow \quad y = (x^2 + C)^{5/3}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una solución singular es la función constante $y(x) = 0$.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** por identificar (o exhibir) un método que permita resolver la edo.
- Asignar **(0.5 ptos)** por resolver correctamente la edo, obteniendo o bien una ecuación para x e y o bien una fórmula para y como función de x. **Se descontarán (0.2 ptos) si en la respuesta del estudiante no aparece la constante de integracón.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por determinar (exhibir) una solución singular.

c) Para resolver el PVI, buscamos una solución de la forma $y = (x^2 + C)^{5/3}$, y tal que $y(0) = -1$. Necesitamos entonces:

$$-1 = (0 + C)^{5/3} \quad \Rightarrow \quad C = (-1)^{3/5} = -1.$$

Luego la solución al PVI está dada por

$$y(x) = (x^2 - 1)^{3/5}.$$

donde su dominio es toda la recta real.

Notamos que nuestra solución satisface

$$y(\pm 1) = 0,$$

por lo que en particular es solución del PVI

$$y' = \frac{10}{3} x y^{2/5}, \quad y(1) = 0,$$

donde la función constante $y(x) = 0$ es otra solución. Lo mismo ocurre con la condición inicial $y(-1) = 0$.

Por otro lado, de la parte *a)* sabemos que el PVI tiene solución única cerca de $x = x_0$ para cualquier condición inicial tal que $y(x_0) = y_0 \neq 0$, por lo que la unicidad de una solución falla precisamente cuando $y = 0$.

Se concluye entonces que el intervalo más grande donde $y(x) = (x^2 - 1)^{3/5}$ es solución única al PVI

$$y' = \frac{10}{3} x y^{2/5}, \quad y(0) = -1,$$

es el intervalo $(-1, 1)$.

Dos soluciones al PVI anterior definidas en todo $\mathbb{R}$ son:

$$y(x) = (x^2 - 1)^{3/5} \quad \text{e} \quad y(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^{3/5} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1. \end{cases}$$

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** por determinar el valor de la constante en la solución encontrada en la parte anterior, dada la condición inicial. **Este puntaje se asignará independiente si el estudiante resuelve correcta o incorrectamente la edo (pero la resuelve).**
- Asignar **(0.5 ptos)** por determinar el intervalo más grande ($(-1, 1)$) donde la solución es única.
- Asignar **(1 pto)** por cada solución al PVI con dominio en todo $\mathbb{R}$. Total **(2 pto)**. **Si el estudiante escribe $y = (x - 1)^{3/5}$ en alguna parte del desarrollo de esta parte del ejercicio, sin restricción del dominio, ya tiene asegurado (1 pto).**

3. *a*) Resuelva el PVI,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(1) = 0.$$

b) Resuelva la ecuación,

$$xy'' + y' = 0, \quad x > 0$$

Nota. Recuerde explicitar el dominio de las soluciones.

Solución.

a) Haciendo el cambio de variable $xu = y$ la ecuación quedará dada por:

$$u + xu' = \frac{u-1}{u+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u+1}{u^2+1}\,du = -\frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{u+1}{u^2+1}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

Calculando las integrales tendremos

$$\frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \arctan(u) = -\ln\big(|x|\big) + C$$

Volviendo a través del cambio de variable $u = \dfrac{y}{x}$ tendremos

$$\frac{1}{2}\ln(1+(y/x)^2) + \arctan(y/x) = -\ln\big(|x|\big) + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan(y/x) = C$$

Usando la condición inicial $y(1) = 0$ podemos concluir que $C = 0$ y por tanto el PVI tendrá solución implícita mediante la ecuación

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan(y/x) = 0$$

Finalmente, dado que $x = 0$ no es admisible en esta ecuación y que la condición inicial es en $x = 1$, podemos concluir que el dominio de la solución es $x > 0$.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** por evidenciar el cambio de variable $xu = y$ o uno equivalente. **No es necesario que ejecute el cambio de variable para asignar este puntaje.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por obtener la ecuación diferencial que resulta luego de realizar el cambio de variable. **Este puntaje se asignará únicamente si se ejecuta correctamente el cambio de variable.**
- Asignar **(1 ptos)** por resolver correctamente la ecuación diferencial resultante en la nueva variable. **Este puntaje se asignará independientemente si fue ejecutado correctamente el cambio de variable, siendo sólo necesario resolver correctamente la edo resultante, incluyendo la constante de integración. Se descontará (0.2 ptos) si no aparece la constante de integración.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por obtener la solución de la edo en las variables x e y, cambiando u por y/x sin cometer errores. **Este puntaje se asignará independientemente si se realizó correctamente el cambio de variable que permitió resolver la edo**
- Asignar **(0.5 ptos)** Por determinar el valor de la constante, dado el valor inicial. **Este puntaje se asignará independientemente si se realizó correctamente el cambio de variable que permitió resolver la edo.**

b) Haciendo el cambio de variable $p = y'$ la ecuación quedará dada por:

$$xp' + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p}\,dp = -\frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p}\,dp = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

Calculando las integrales tendremos

$$\ln(|p|) = -\ln\big(|x|\big) + C \quad \Leftrightarrow \quad |p| = \frac{C}{x}, \quad x > 0$$

Sin pérdida de generalidad, levantaremos el valor absoluto para p cargando el signo a la constante C obteniendo así

$$p = \frac{C_1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Volviendo a través del cambio de variable $p = y'$ tendremos

$$y' = \frac{C_1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 \ln(x) + C_2$$

con dominio $(0, \infty)$.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 ptos)** por evidenciar el cambio de variable $p = y'$ o uno equivalente. **No es necesario que ejecute el cambio de variable para asignar este puntaje.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por obtener la ecuación diferencial que resulta luego de realizar el cambio de variable. **Este puntaje se asignará únicamente si se ejecuta correctamente el cambio de variable.**
- Asignar **(1 ptos)** por resolver correctamente la ecuación diferencial resultante en la nueva variable. **Sólo se asignará este puntaje si se ejecutó correctamente el cambio de variable. Se descontará (0.2 ptos) si no aparece la constante de integración.**
- Asignar **(0.5 ptos)** por obtener la solución de la edo en las variables x e y, cambiando p por y sin cometer errores. **Este puntaje se asignará únicamente si se ejecuta correctamente el cambio de variable que permitió resolver la edo.**
- Asignar **(0.5 ptos)** Por resolver la edo $y' = C_1/x$. **Se descontarán (0.2 ptos) si no aparece la segunda constante de integración.**

4. Una población $P(t)$ de pequeños roedores tiene una tasa de natalidad $\beta = (0{,}001)P$ (al mes por roedor) y una tasa de mortalidad constante δ. Si $P(0) = 100$ y $P'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tomará a esta población duplicarse a 200 roedores?

Solución. Una ecuación diferencial para este problema es

$$\frac{dP}{dt} = P\big((0{,}001)P - \delta\big)$$

Dadas las condiciones iniciales $P(0) = 100$ y $P'(0) = 8$, luego de remplazar en la ecuación, tendremos

$$8 = 100(0{,}001 \cdot 100 - \delta) \quad \Rightarrow \quad \delta = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = \frac{1}{10^3}P\big(P - 20\big)$$

Resolviendo la ecuación diferencial resultante (logística) tendremos que

$$P(t) = \frac{M \cdot P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{k \cdot Mt}}$$

siendo $M = 20$, $P_0 = 100$ y $k = 10^{-3}$. Por lo anterior,

$$P(t) = \frac{2000}{100 - 80e^{0{,}02t}}$$

Finalmente, si t_0 es el instante de tiempo (en meses) en que la población se ha duplicado, entonces se debe satisfacer que:

$$P(t_0) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2000}{100 - 80e^{0{,}02t_0}} = 200 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 50\ln(9) \text{ meses}$$

Asignación de Puntaje

- Asignar **(1 ptos)** por identificar (escribir) la ecuación diferencial que modela el problema.
- Asignar **(1 ptos)** por determinar, con un cálculo y ecuación que justifique su respuesta, el valor de δ. **Si no hay ecuación que justifique su respuesta, no se asignará puntaje.**
- Asignar **(2 ptos)** resolver la ecuación diferencial. **Este puntaje se asignará únicamente si se llegó correctamente a la ecuación diferencial, donde no es necesario que se hayan remplazado los valores de las constantes (parcial o total). Si el estudiante llegó a otra ecuación y la resuelve correctamente asignar (1 pto)**
- Asignar **(1 ptos)** por determinar una expresión para $P = P(t)$ dadas las condiciones iniciales y el valor de δ. **Este puntaje se asignará únicamente si se llegó correctamente a la ecuación diferencial. Si el estudiante llegó a otra ecuación y la resuelve el PVI correctamente asignar (0.5 pto)**.
- Asignar **(1 ptos)** por determinar el valor de t pedido. **Este puntaje se asignará únicamente si se llegó correctamente a la ecuación diferencial. Si el estudiante llegó a otra ecuación, resolvió el PVI correctamente y luego encuentra correctamente el (su) valor de t para asignar (0.5 pto)**.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa