PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2012

INTERROGACIÓN I3
MLM1640 $*$ Ecuaciones Diferenciales

1. *a*) Sabiendo que $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} x' = & tx + (1-t^2)y \\ y' = & x - ty \end{cases}$$

demuestre que la función

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t & x(t) \\ 1 & y(t) \end{pmatrix}$$

es constante, para cualquier otra solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Deduzca que $x(t) = x(0)+ty(t)$.

b) Use lo anterior para encontrar la única solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ del sistema dado, que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Solución

a) Sea $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ una solución cualquiera. Entonces, por la fórmula de Abel (o Liouville),

$$W(t) = W(0)e^{\int_0^t traza A(t)}.$$

Como la matriz de coeficientes $A(t)$ tiene traza 0, se deduce que $W(t) = W(0)$, o sea, W es constante. **3 puntos**

También se puede calcular $W'(t)$ directamente, desarrolando el determinante, derivando con respecto a t y usando es sistema, para deducir que $W'(t) = 0$.

b) Se tiene que $W(0) = -x(0)$, de modo que $ty(t) - x(t) = -x(0) = 1$. Despejando por ejmplo $x(t)$ y reemplazando en la segunda ecuación del sistema, se obtiene que $y(t)$ es la única solución de la ecuación $y' = 1$, con $y(0) = 0$. Por lo tanto, $y(t) = t$ y $x(t) = t^2 + 1$. **3 puntos**

2. Encuentre la solución del sistema,

$$\begin{cases} x' = & 6x - 4y + 2t + 1 \\ y' = & x + 2y + t \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Solución

Primero estudiamos la ecuación homogénea con matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 4)^2$ y $\lambda_1 = 4$ es el único valor propio, con multiplicidad algebraica 2.

Un vector propio es $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la correspondiente solución $e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vector propio generalizado es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (L.I. con el primero), el que entrega una segunda solución, $e^{4t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}$.

La solución general de la ecuación homogénea es entones,

$$\overrightarrow{x}_h(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}$$

2 puntos

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea, es posible usar coeficientes indeterminados o calcular,

$$e^{tA} = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1},$$

donde,

$$\Phi(t) = \quad e^{4t}\begin{pmatrix} 2 & 1+2t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

Un cálculo directo da,

$$e^{tA} = \quad e^{4t}\begin{pmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{pmatrix}$$

y una solución particular es entonces,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_p(t) &= \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 1+2s \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{4(t-s)}\begin{pmatrix} 1+2s \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{4}(1-e^{4t})\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 puntos

Ajustando las constantes c_1 y c_2, se obtiene la solución,

$$\overrightarrow{x} = 2e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3e^{4t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(e^{4t}-1)\begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}$$

1 punto

También se puede usar la fórmula que da la variación de parámetros, para escribir la solución, sin pasar por el cálculo de las constantes.

3. Use la transformada de Laplace para resolver:

$$\begin{aligned} x'' + 4x' + 5x &= 1 + e^{-t}, \\ x(0) = 0, x'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Solución Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación y usamos la fórmula para la derivada y el hecho que las condiciones iniciales son cero. Obtenemos para $y = \mathcal{L}x(s)$,

$$(s^2 + 4s + 5)y = \frac{1}{s} + \frac{1}{1+s}$$

de donde,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1+2s}{s(s+1)(s^2+4s+5)}]$$

3 puntos

Usando fracciones parciales para descomponer el término en la transformada inversa, obtenemos,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\frac{1}{5}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{7}{10}s + \frac{23}{10}}{s^2+4s+5}]$$

1 punto

Ahora,

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) = e^t\,.$$

Además, $s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{7}{10}s + \frac{23}{10}}{s^2+4s+5}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{7}{10}\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{9}{10}\frac{1}{(s+2)^2+1})$$

$$= \frac{7}{10}e^{-2t}\cos t + \frac{9}{10}e^{-2t}\sin t$$

1 punto

De aquí se obtiene la solución. **1 punto**

También se puede mantener el término con la transformada del lado derecho hasta el final y luego usar la ffomula de convolución.

4. Usando la Transformada de Laplace, encuentre la solución de la ecuación,

$$y'' + 16y = H(t - 2\pi),$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 1$ y determine su grado de diferenciabilidad. ($H(t) = 0$, para $t \leq 0$ y $H(t) = 1$, para $t > 0$.)

Solución Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación y obtenemos para $y = \mathcal{L}x(s)$,

$$(s^2 + 16)y - s - 1 = \mathcal{L}H(t - 2\pi)$$

de donde,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{(\mathcal{L}H(t-2\pi) + s + 1)}{s^2+16}]$$

$$= H(t-2\pi) \star \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+16} + \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+16} + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+16}$$
$$= H(t-2\pi) \star \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \cos 4t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t$$

3 puntos

El primer término es,

$$\int_0^t H(t-2\pi)\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2\pi \\ \frac{1}{16}(1-\cos 4t) & \text{si } t \geq 2\pi \end{cases}$$

1,5 puntos

Como este término es C^1 y los otros dos son C^∞, la solución $x(t)$ es C^1.

1,5 puntos