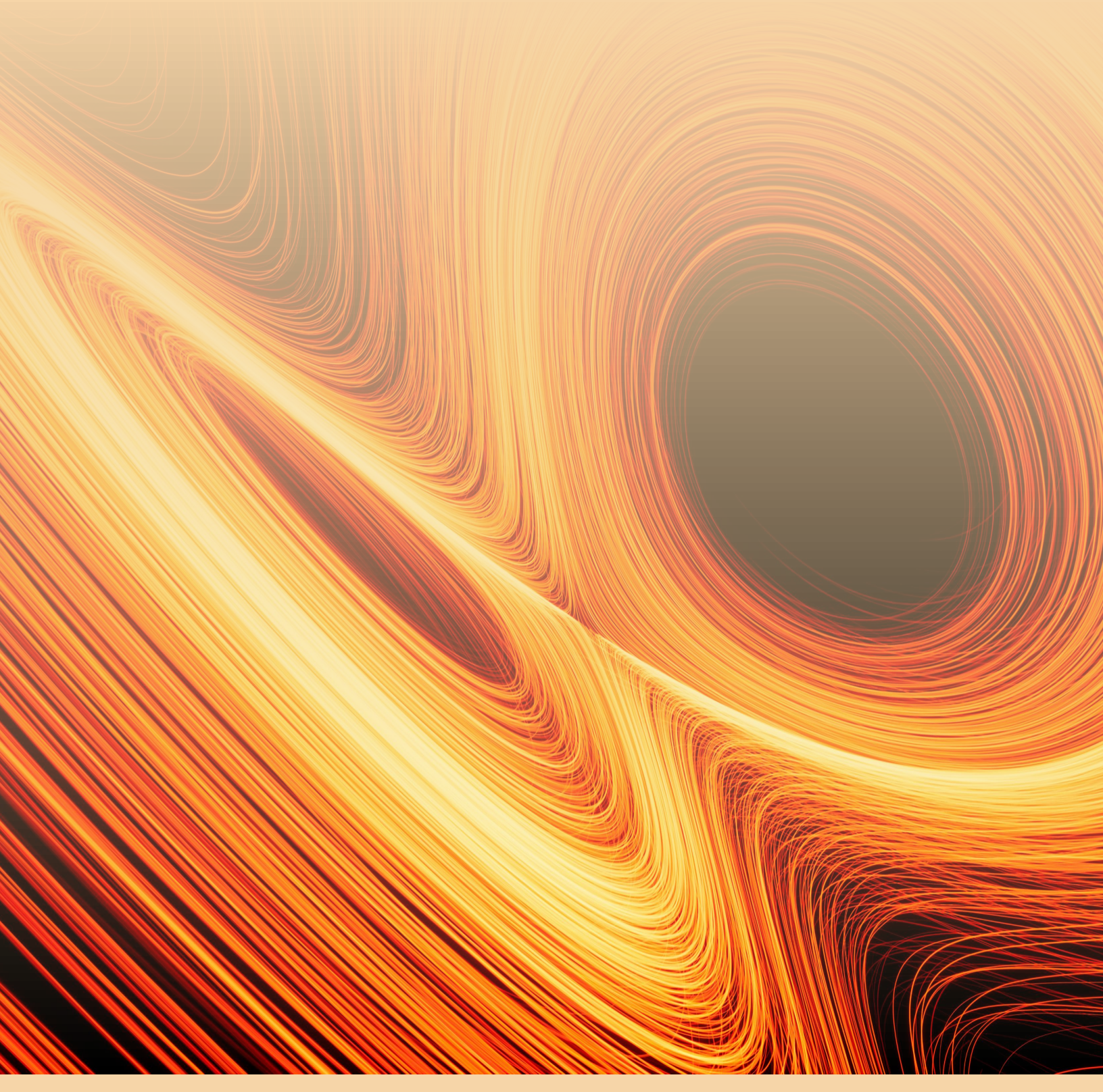
Ecuaciones Diferenciales (MAT1640)

Francisco Solis



CONTENIDOS

1 Ecuaciones diferenciales de primer orden **4**

2 Ecuaciones diferenciales de orden superior **12**

3 Sistemas de ecuaciones diferenciales **23**

4 Transformada de Laplace **38**

DISCLAIMER

El siguiente documento **no corresponde a material oficial** del curso MAT1640, por lo que debe ser utilizado con precaución. El lector se debe de hacer responsable de las posibles consecuencias que podría traer el utilizar este documento, por ejemplo, no podría apelar en una prueba si utilizó algo de aquí para responder y estaba mal tipeado.

Si bien intenté el cometer la menor cantidad de errores posibles, esto no garantiza que toda la información contenida en este documento esté del todo correcta (puede que haya errores de tipeo, o cosas por el estilo), por lo que ante cualquier duda, corroborar con el material entregado por los profesores. Aún así espero que pueda ser un buen material complementario al curso.

CAPÍTULO

1

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación [1] que relacióna una función desconocida con una o más de sus derivadas se llama ecuación diferencial. El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene como objetivos:

- Descubrir la ecuación diferencial que describe una situación física específica
- Encontrar la solución apropiada de esa ecuación
- Interpretar la solución encontrada

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella. En las EDO, la función desconocida (variable dependiente) depende de una sola variable independiente. Si la variable dependiente es una función de dos o más variables independientes, aparecerán derivadas paricales y así la ecuación se llamará ecuación diferencial parcial.

Ecuaciones diferenciales de primer orden son de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden son de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$$

La forma general de la mayoría de las ecuaciones diferenciales de orden n con variable independiente x y función desconocida o variable dependiente y = y(x) es

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

[1] Desde en adelante, puede aparecer como ec

donde F es una función de valores reales específica de n+2 variables.

La función continua u = u(x) es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo I siempre que las derivadas $u', ..., u^{(n)}$ existan en I y $F(x, u, u', ..., u^{(n)}) = 0 \; \forall x \in I$. Una curva solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es simplemente una curva en el plano x,y cuya línea tangente en cada punto (x,y) tiene pendiente m = f(x,y).

Nota

Observación: $y^{(n)} \neq y^n$

A través de cada grupo representativo de puntos (x,y) en el plano se obtiene un segmento lineal corto que tiene una pendiente propia m = f(x,y). Todos estos segmentos lineales constituyen un campo de pendientes (o un campo direccional) comúnmente llamados campos de isoclinas de la ecuación $y' = f(x, y)$.

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones)

Supóngase que tanto la función f(x,y) y su derivada parcial $D_y f(x, y)$ son continuas en algún rectángulo R en el plano xy que contiene el punto (a,b) en su interior. Entonces, para algún intervalo abierto I conteniendo al punto a, el problema del valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y(a) = b$$

tiene una y sólo una solución que está definida en el intervalo I.

La EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ es llamada separable siempre que H(x,y) puede escribirse como el producto de una función de x y una función de y: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(t) = \frac{g(x)}{f(y)}$ donde $h(y) = \frac{1}{f(y)}$, pudiéndose escribir como f(y)dy = g(x)dx, para resolver la ecuación simplemente se integra.

La ecuación K(x,y) = 0 se llama comúnmente solución implícita de una ecuación diferencial si se satisface (en algún intervalo) con alguna solución y = y(x) de la EDO.

Nota

Las soluciones de una EDO dada pueden ganarse o perderse cuando se multiplica o divide por un factor algebraico.

Una solución de una EDO que contiene una constante arbitraria se llama comúnmente solución general de la EDO. Las soluciones singulares son una o varias soluciones que no pueden ser obtenidas al elegir algún valor de C.

Un factor integrante para una EDO es una función p(x,y) tal que la multiplicación de cada lado de la EDO por p(x,y) produce una ecuación en la cual cada lado es reconocible como una derivda. Con ayuda de un factor integrante apropiado, existe una técnica estándar para resolver la EDO lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ en un intervalo en el cual las funciones coeficientes P(x) y Q(x) son continuas. Al multiplicar ambos lados de

la ecuación por el factor de integración p(x) = $e^{\int P(x)\ dx}$ el resultado es:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$(y(x)e^{\int P(x)dx})\frac{d}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$y(x)e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$
$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

Método: Solución de EDOs de 1er orden

1. Empezar por calcular el factor de integración p(x) = $e^{\int P(x)\ dx}$
2. Multiplicar ambos lados de la EDO por p(x)
3. Identificar el lado izquierdo de la ecuación resultante como la derivada de un producto
4. Finalmente integrar la ecuación, despuése resolver para y y obtener la solución general de la EDO original.

Teorema (Ecuación lineal de primer orden)

Si las funciones P(X) y Q(x) son continuas en el intervalo abierto I que contiene al punto x_0, entonces el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
$$y(x_0) = y_0$$

tieene una solución única y(x) en I, dada por la fórmula de la ecuación para un cierto valor de C.

Hay métodos de sustitución que pueden usarse en algunos casos para transformar la EDO dada en otra que se sabe como resolver. Ejemplo, la EDO $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con variable dependiente y y variable independiente x, puede tener una combinación evidente v = a(x,y) de x e y que sugiera, por sí misma, una nueva variable independiente v.

Una EDO homogénea de 1er orden es aquella que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \text{ si se hacen las sustituciones}$$

$v = \frac{y}{x}, y = vx, \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$, entonces la ecuación se transforma en la ecuación de variables separables

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

Toda EDO homogénea de 1er orden puede reducirse a un problema de integración por medio de la sustitución indicada.

Una EDO de 1er orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Se llama ecuación de Bernoulli. Si n = 0 o n = 1, entonces la ecuación es lineal. De otra manera, la sustitución v = y^{1-n} transforma la ecuación en una ecuación lineal.

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Se ha visto que una solución general y(x) de una EDO de 1er orden está con frecuencia definida implícitamente por una ecuación de la forma

$$F(x, y(x)) = C$$

Si derivamos parcialmente respecto a x nos queda:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ esto es}$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \text{ donde}$$

$$M(x,y) = F_x(x,y) \; y \; N(x,y) = F_y(x,y)$$

algunas veces es conveniente reescribir la ecuación como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

llamada su forma diferencial.

La EDO de 1er orden y' = f(x,y) puede escribirse en esta forma con M = f(x,y) y N = -1. Lo anterior muestra que, si existe una función F(x,y) tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \;\; y \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

entonces la ecuación F(x,y) = C, define implícitamente una solución general. En tal caso, ésta se llama EDO exacta, la diferencial dF = $F_x dx + F_y dy$ de F(x,y) es exactamente Mdx + Ndy.

Teorema (Criterio de exactitud)

Supóngase que las funciones M(x,y) y N(x,y) son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en el rectángulo abierto R: $a < x < b, c < y < d$. Entonces la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta en R si y solamente si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en cada punto de R. Esto es, existe una función F(x,y) definida en R con

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \;\; y \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

si y sólo si la ecuación anterior se cumple en R.

Una EDO de 2do orden involucra una 2da derivada de la función desconocida y(x), y por tanto tiene la forma general

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Si la variable dependiente y o la variable independiente x no se encuentran en la ecuación de 2o orden, entonces esto es reducible por una sustitución en un sistema de ecuaciones de 1er orden.

- Ausencia de la variable dependiente y: Si y no está presente, entonces

$$F(x, y', y'') = 0, y\ p = y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{dp}{dx} \quad \text{resultando en}$$
$$F(x, p, p') = 0$$

- Ausencia de la variable independiente x: Si x no está presente, entonces:

$$F(y, y', y'') = 0, p = y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} \quad \text{resultando en}$$
$$F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0, \text{ para p como función de y}$$

Una ecuación del tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

se le dice autónoma, al no estar explícitamente la variable independiente t. Las soluciones de la ecuación f(x) = 0 juegan un papel importante y son llamados puntos críticos de la EDO autónoma $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Si x = c es un punto crítico de la ecuación anterior, entonces la EDO tiene solución cte x(t) = c. Una solución constante de una EDO se conoce como solución de equilibrio.

Se dice que un punto crítico x = c de una EDO de 1er orden autónoma es estable siempre que el valor inicial x_0 este suficientemente cercano a c, entonces x(t) permanece cercano a C $\forall t > 0$. Más precisamente, el punto crítico c es estable, si para cada $\epsilon > 0$, $\exists\ un\ \delta > 0$ tal que

$$|x_0 - c| < \delta \text{ implica que } |x(t) - c| < \epsilon$$

De otra manera el punto crítico x = c será inestable.

Notas de clase

Observación: Al resolver una edo es importante anotar el intervalo y su solución
Observación: La linealidad es con respecto a la variable dependiente (siempre la variable desconocida). Linealidad debe ser en todas las variables dependientes.
EDO Autónoma: La variable independiente no está explícita.
Observación: La solución global se refiere a todo $\mathbb{R}$, y la solución maximal se refiere en todo un intervalo. La solución maximal es el intervalo más amplio que se puede tener.
Recordatorio: ¡En EDO separable no olvidar buscar las soluciones singulares!. Es la función de la variable dependiente la que se iguala a cero, para así obtener los valores singulares
Definición: Una EDO de orden 1 de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se dice homogénea de grado α si la función f es una función homogénea de grado α tal que f(tx,ty) = t^af(x,y). Nosotros veremos el caso donde $\alpha = 0$.
Observación: Si tomamos una EDO de orden 1 autónoma y se toma valor inicial $y(t_0) = y_0$. Si y(t) es solución de la EDO autónoma y' = f(y), entonces y($t - t_0$) es también solución.
Observación: Existen métodos para convertir EDOs inexactas en exactas. Referirse a página 84 del libro "Ordinary Differential Equations".

Propuesta dada en clase

Si se tiene una EDO del tipo

$$y' = g(ax + by + c)$$

se propone el cambio de variable

$$u = ax + by + c$$

donde

$$y' = \frac{u' - a}{b}$$

con lo cual obtenemos una EDO separable autónoma al reemplazar en donde corresponde.

Definición dada en clase

Una ecuación diferencial de orden 1 de la forma $\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ donde a,b,c son funciones continuas I $\Rightarrow$ R, se llama ecuación diferencial de Ricatti.

Observación: Si conocemos una solución particular y_0 entonces podemos resolver este tipo de ecuaciones con el cambio de variable

$$z = y - y_0$$

quedando de la forma

$$\frac{dz}{dx} = (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2$$

la cual corresponde a una ecuación de Bernoulli.

Pasos para llegar hasta el $\frac{dz}{dx}$:

Dado que se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

hacemos el cambio de variable:

$$z = y - y_0,$$

con lo cual podemos obtener

$$z' = y' - y_0^{'}$$

De aquí podemos desarrollar esa expresión como:

$$\begin{aligned}
z' &= a(x)y^2 + b(x)y + c(x) - (a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c_x) \\
z' &= b(x)(y - y_0) + a(x)y^2 - a(x)y_0^2 \\
z' &= b(x)z + a(x)[y^2 - y_0^2] \\
z' &= b(x)z + a(x)[(y + y_0)(y - y_0)] \\
z' &= b(x)z + a(x)[(z + 2y_0)(z)] \\
z' &= b(x)z + a(x)z^2 + 2a(x)y_0z \\
z' &= (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos la ecuación diferencial ya mencionada, la cual corresponde a una ecuación de Bernoulli. **Observación:** En la literatura se menciona el cambio de variable: y = y_1 + $\frac{1}{v}$ donde y_1 es una solución particular de la EDO

Estudio cualitativo/estabilidad

Sea y' = f(y) una EDO autónoma de orden 1. Se define a los puntos c tal que f(c) = 0, como puntos de equilibrio para la EDO (se llaman puntos críticos). Además, la solución dada por y(t) = c, $\forall$ t $\in \mathbb{R}$ se llama solución de equilibrio.

Definición (estabilidad)

Sea

$$y' = f(y)$$
$$y(0) = y_0$$
c un punto crítico.

entonces, c es un equilibrio estable siempre que el punto inicial y_0 está suficientemente cercano a c, entonces y(t) permanece cercano a c $\forall$ t.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |y_0 - c| < \delta \Rightarrow \forall t, |y(t) - c| < \epsilon$$

si no se llama equilibrio inestable. C es asíntota estable si

$$\exists \delta > 0, |y_0 - c| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = c$$

Observación: No olvidar hacer el diagrama de fase y hacer la clasificación

Teorema

Sea C un punto crítico de la EDO y' = f(y), donde f $\in C^1$. Entonces

- Si f'(c) < 0, entonces c es estable o asintóticamente estable.
- Si f'(c) > 0, entonces c es inestable

Observación importante: Este criterio no aplica si f'(c) = 0, hay que analizar caso por caso.

Modelos típicos

Modelo de tranques:

$$x'(t) = t_{\text{in}} c_{\text{in}} - t_{\text{out}} c_{\text{out}}$$
$$c = \frac{x(t)}{v(t)} = \text{concentración}$$

Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

Modelo de población:

$$\frac{dP}{dt} = (B(t) - \delta(t))P$$

Modelo logístico:

$$\frac{dP}{dt} = kP(l - P)$$

CAPÍTULO

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sea $G(x, y, y', y'') = 0$, se dice que la EDO es lineal si G es lineal en la variable dependiente y y sus derivadas y' *e* y''. Así, una ecuación lineal de segundo orden toma la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

siendo A, B, C, funciones continuas en I. Si la función F(x) en el lado derecho de la ecuación se anula en I, entonces ésta se llama ecuación lineal homogénea, en el caso contrario se denomina no homogénea.

Teorema (Principio de superposición para ecuaciones homogéneas)

Sean y_1 *e* y_2 dos soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo I. Si $c_1 y\, c_2$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

es también una solución de la ecuación en I.

Teorema (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales)

Supóngase que las funciones p, q y f son continuas en el intervalo abierto I que contiene a punto a. Entonces, dadas cualesquiera dos números $b_0\, y b_1$ la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

tiene una solución única (esto es, una y solamente una) en el intervalo entero I que satisface las condiciones iniciales

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1$$

Definición (Independencia lineal de dos funciones)

Se dice que dos funciones definidas en un intervalo abierto I son linealmente independientes en I si ninguna de ellas es un múltiplo constante de la otra. Dadas dos funciones f y g, el wronskiano de f y g es el determinante

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

se escribe W(f,g) o W(x)

Teorema (Wronskianos de soluciones)

Supóngase que y_1 e y_2 son dos soluciones de la ecuación lineal de 2do orden homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en un intervalo abierto I en el cual p y q son continuas

- Si y_1 e y_2 son linealmente dependientes, entonces W(y_1,y_2) = 0 en I.
- Si y_1 e y_2 son linealmente independientes, entonces W(y_1,y_2) $\neq$ 0 en cada punto de I.

Teorema (Soluciones generales de ecuaciones homogéneas)

Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

con p y q continuas en el intervalo abierto I. Si Y es cualquier solución de la ecuación en I, entonces existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ \forall x \in I$$

Definición

Sea la EDO lineal de 2do orden homogénea:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

con coeficientes constante a, b, c. Se observa que una solución es $y(x) = e^{rx}$. Reemplazando debidamente llegamos a la ecuación:

$$ar^2 + br + c = 0$$

llamada ecuación característica de la EDO homogénea.

Teorema (Raíces reales distintas)

Si las raices r_1 y r_2 de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0$$

son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es una solución general de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Teorema (Raíces repetidas)

Si la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0$$

tiene raíces iguales (necesariamente reales) $r_1 = r_2$, entonces

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}$$

es una solución general de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Teorema (Raíces complejas)

Si las raíces de la ecuación característica:

$$ar^2 + br + c = 0$$

son complejas (discriminante menor a 0), la solución viene dada de la forma:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos(\beta x) + c_2 sin(\beta x))$$

Nota: Las soluciones vienen de a pares, es decir, r = $\alpha \pm i\beta$

Fórmula de Abel

Si se tiene:

$$y'' + py' + qy = 0$$
$$W' = -pW$$
$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} -p(s)ds}$$

Si queremos determinar una segunda solución y_2 de $y'' + py' + qy = 0$, conociendo una primera solución y_1 (y_2 la queremos LI de y_1), entonces:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Se puede escribir la EDO lineal de n-ésimo orden de la forma

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x)$$

diviendo por $P_0 \neq 0$, se tiene

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

y siendo su ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

Teorema (Principio de superposición para ecuaciones homogéneas)

Sean $y_1, ..., y_n$, n soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

en el intervalo I. Si $c_1, ..., c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + ... + c_ny_n$$

es también una solución de la ecuación en I.

Teorema (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales)

Supóngase que las funciones $p_1, ..., p_n$ y f son continuas en el intervalo abierto I que contiene el punto a. Entonces, dados n valores $b_0, ..., b_{n-1}$ la ecuación lineal de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

tiene una solución única (una y sólo una) en el intervalo entero I que satisface las n condiciones iniciales

$$y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1, ..., y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

Definición (Dependencia lineal de funciones)

Se dice que las n funciones $f_1, ..., f_n$ son linealmente dependientes en el intervalo I siempre que existan constantes $c_1, ..., c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$

en I, esto es

$$c_1 f_1(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \; \forall x \in I$$

Supóngase que las n funciones $f_1, ..., f_n$ son cada una n-1 veces derivables. Entonces su wronskiano es el determinante n x n

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema (Wronskiano de soluciones)

Supóngase que $y_1, ..., y_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0$$

en un intervalo abierto I, donde cada p_I es continua. Sea W = W(y_1,...,y_n)

- Si y_1,...,y_n son linealmente dependientes, entonces W = 0 en I
- Si y_1,...,y_n son linealmente independientes, entonces W $\neq$ 0 en cualquier punto de I

Teorema (Soluciones generales de ecuaciones homogéneas)

Sean $y_1, ..., y_n$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0$$

en el intervalo abierto I donde las p_i son continuas. Si Y es cualquier solución de la ecuación anterior, entonces existen valores $c_1, ..., c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \; \forall x \in I$$

Teorema (Soluciones de ecuaciones no homogéneas)

Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

en un intervalo abierto I donde las funciones p_I y f son continusa. Sean $y_1, ..., y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

Si Y es alguna solución de la ecuación homogénea en I, entonces existen valores $c_1, \cdots, c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) \ \forall x \in I$$

A $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ se le llama solución complementaria.

Teorema (raíces reales distintas)

Si las raíces $r_1, \cdots, r_n$ de la ecuación característica

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$$

son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + \cdots + c_ne^{r_nx}$$

es una solución general de

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

Teorema (raíces repetidas)

Si la ecuación característica

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$$

tiene una raíz repetida r de multiplicidad k, entonces parte de la solución general de la EDO

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

correspondiente a r es de la forma

$$(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})e^{rx}$$

Nota

Recordar $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \text{isen}(\theta)$

Teorema (raíces complejas)

Si la ecuación característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

tiene un par no repetido de raíces complejas conjugadas a $\pm bi$ $(b \neq 0)$, entonces la parte correspondiente de la solución general de la ecuación

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

tiene la forma

$$e^{ax}(c_1 cos(bx) + c_2 sen(bx))$$

Regla 1 (método de coeficientes indeterminados)

Supóngase que ningún término que aparece en f(x) o en cualquiera de sus derivadas satisface la ecuación homogéne asociada Ly = 0. Entonces, tómese como una solución de prueba para y_p una combinación lineal de esos términos linealmente independientes y de sus derivadas. Determínense los coeficientes por sustitución de esta solución de prueba dentro de la ecuación no homogénea Ly = f(x)

Nota

El operador

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

opera en una función y(x) derivable n veces para producir una combinación lineal

$$Ly = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y$$

Regla 2 (método de coeficientes indeterminados)

Si la función f(x) es de cualquiera de las formas

$$P_m(x) e^{rx} cos(kx) \text{ ó } P_m(x) e^{rx} sen(kx)$$

tómese como una propuesta de solución

$$y_p(x) = x^s [(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m) e^{rx} cos(kx) + (B_0 + B_1 x + \cdots + A_B x^m) e^{rx} sen(kx))]$$

donde s es el enterno no negativo más pequeño tal que no existe un término y_p que duplique a un término en la función complementaria y_c. Determínese, posteriormente, los coeficientes en $y_p(x)$ por sustitución de y_p en la ecuación no homogénea.

Teorema (variación de parámetros)

Si la ecuación nó homogénea

$$y'' + P(x)y' + a(x)y = f(x)$$

tiene función complementaria

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

entonces una solución particular está dada por

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx$$

donde W = W(y_1, y_2) es el wronskiano de las dos soluciones independientes y_1 *e* y_2 de la ecuación homogénea asociada.

Teorema (Ec con coeficientes constantes orden n > 2

Sea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

y sea su polinomio característico asociado:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0$$

- Si $r_1, ..., r_n$ son n raíces reales distintas entonces la solución general está dada por

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x}$$

- Si r es una raíz real de multiplicidad k entonces la parte complementaria está dada por:

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$$

- si $r_1 = \alpha + i\beta$ son raíces complejas conjugadas no repetidas. Entonces la parte correspondiente en la solución general es de la forma:

$$e^{\alpha x}(c_1 cos(\beta x) + c_2 sin(\beta x))$$

- Si $r_{\pm} = \alpha + i\beta$ es un par de raíces complejas de multiplicidad k, entonces la parte correspondiente en la solución general está dada por:

$$e^{\alpha x} \sum_{p=0}^{k-1} x^p (a_p cos(\beta x) + b_p sin(\beta x))$$

Método de coeficientes indeterminados(visto en clase)

Funciona con polinomios, exponenciales, y combinación lineal de seno y coseno. En donde para obtener la solución particular, tenemos que derivar los términos de f y fijarnos en que sean LI respecto a la solución homogénea.

Métodos:

- Si f no satisface la EDO homogénea entonces y_p será una combinación lineal de los términos que aparecen en f.

$$a_n y^n + ... + a_o y = f_1 + f_2 + ... + f_n$$

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} y_p^k \text{ , tal que } y_p^k \text{ es sol particular } a_n y^n + ... + a_0 y = f_k(x)$$

  Ejemplo:

$$y'' - 4y' + 2y = 4e^x - sin(x)$$
$$y_p = Ae^x + \alpha sin(x) + \beta cos(x)$$

  Para el seno y coseno, las soluciones vienen de a pares.

- Si f(x) = $P_m(x)e^{rx}cos(kx)$ ó $P_m(x)e^{rx}sin(kx)$. Entonces la solución particular de la EDO será de la forma

$$y_p(x) = x^s q_m(x)e^{rx}cos(kx) + x^s R_m(x)sin(kx)$$

  donde s es el entero mínimo que elimina la duplicación.

Método de variación de constantes/parámetros (visto en clase)

Sea

$$y^n + p_{n-1}y^{n-1} + ... + p_1 y' + p_0 y = f(x)$$

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$$

Buscamos:

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) y_k(x)$$

Veremos el detalle para n = 2. Sea

$$y'' + py' + qy = f$$

Queremos determinar

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

tal que y_1, y_2 son soluciones LI de la parte homogénea (conj. fundamental de la EDO). Osea y_1, y_2 son solución de

$$y'' + py' + qy = 0$$

entonces las funciones u_1, u_2 tienen que satisfacer:

$$\left.\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

Sistema de Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

Donde

$$u_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx$$

Teorema

Sean y_1, y_2 dos soluciones L.I de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + py' + qy = f$$

Entonces una solución particular está dada por:

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

donde

$$u_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx$$

Método de variación de parámetros

Si $y_1, ..., y_n$ son solución L.I de la ecuación homogénea asociada

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + p_1y' + p_oy = f(x)$$

Entonces

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$$

tal que

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2 + ... + \alpha_n' y_n = 0 \\ &\alpha_1' y_1' + \alpha_2' y_2' + ... + \alpha_n' y_n' = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_1' y_1^{(n-1)} + \alpha_2' y_2^{(n-1)} + ... + \alpha_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{aligned}\right\}$$

Sea W_k tal que:

$$W_k = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & \cdots & y_n \\ y_1' & \vdots & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & f(x) & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

↑ Columna k

Método de Cauchy-Euler

Si se tiene una ecuación diferencial del tipo:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Se propone el cambio de variable:

$$y = x^r, x > 0$$
$$y' = rx^{r-1},\ y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

CAPÍTULO

3

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En un sistema de dos ecuaciones de primer orden en las variables dependientes x e y tiene la forma general

$$f(t, x, y, x', y') = 0$$
$$g(t, x, y, x', y') = 0$$

donde las funciones f y g están dadas. Una solución de este sistema es el par x(t), y(t) de funciones de t que satisfacen idénticamente ambas ecuaciones en algún intervalo de valores de t. Importante señalar que, cualquier sistema de orden superior puede transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden. Tendremos n variables para una EDO de orden n. Sea

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$$

si se introduce

$$x_1 = x, x_2 = x' \cdots x_n = x^{(n-1)}$$

se obtiene

$$x_n^{'} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n)$$

de n ecuaciones de primer orden. Considérese

$$x_1^{'} = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n^{'} = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}x_n + f_n(t)$$

se dice que este sistema es homogéneo si las funcioines $f_1, \cdots, f_n$ son todas idénticas a cero, en caso contrario, es no homogéneo. Una solución del sistema anterior es una n múltiple de funciones $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ que satisfacen (en algún intervalo) de manera idéntica cada una de las ecuaciones.

Teorema (existencia y unicidad para sistemas lineales)

Supóngase que las funciones $p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, \cdots, f_n$ son continuas en el intervalo abierto I conteniendo el punto a. Entonces, dados los n números $b_1, \cdots, b_n$, el sistema descrito anteriormente tiene una solución única en el intervalo entero I que satisface las n condiciones iniciales $x_1(a) = b_1, \cdots, x_n(a) = b_n$

Una función con valores matriciales, o simplemente una función matricial, es una matriz tal como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

o

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12(t)} & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22(t)} & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2(t)} & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

en la cual cada entrada es una función de t. Se dice que una matriz de funciones **A**(t) es continua (o derivable) en un punto (o intervalo) si cada uno de sus elementos cumple con esta propiedad. La derivada de una matriz de funciones derivable está definida como la derivada de cada uno de sus elementos, esto es

$$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$$

Si se tiene

$$x_1' = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}x_n + f_n(t)$$

Si se introduce la matriz de coeficientes

$$P(t) = [p_{ij}(t)] \text{ y los vectores}$$
$$\mathbf{x} = [x_i] \text{ y } \mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$$

entonces el sistema toma la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + f(t)$$

Mencionar que todo sistema de ecuaciones se puede reducir a uno de primer orden.

Teorema de existencia y unicidad

Sean A y f funciones continuas en I. Entonces para cada t ∈ I, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe única solución para el siguiente PVI:

$$\left.\begin{aligned} y' &= Ay + f \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

Teorema (principio de superposición)

Sean $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ en el intervalo abierto I, n soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

Si $c_1, \cdots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

es también una solución de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

en I.

Notación

$$y_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$$

para k $\in \{1, ..., n\}$ para poder ordenar el conjunto de los vectores $_k\}$ de forma

$$\psi_{y_1,...,y_n}(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Así el sistema

$$y' = Ay \leftrightarrow y'_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}y_{lk}, i, k \in \{1, ..., \} \leftrightarrow \psi'(t) = A(t)\psi(t)$$

Wronskiano de vectores

Definimos el Wronskiano de los vectores $y_1, \ldots, y_n$ como

$$W_{y_1,...,y_n} = det\ \psi(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema (Wronskianos de soluciones)

Supóngase que $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en un intervalo abierto I. Supóngase además que $\mathbf{P}(t)$ es continua en I. Sea

$$W = W(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$$

Entonces:

- Si $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes en I, entonces W = 0 en cada punto de I.
- Si $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en I, entonces W $\neq$ 0 en cada punto de I.

Así existen sólo dos posibilidades para las soluciones de sistemas homogéneos.

Teorema (Soluciones generales de sistemas homogéneos)

Sean n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$ de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en el intervalo abierto I, donde $\mathbf{P}(t)$ es continua. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en I, entonces existen valores $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i(t)$$

para toda t en I.

Observaciones

- Típica pregunta de prueba, reducir a un sistema de orden uno una EDO de orden superior
- Tener ojo cuando nos preguntan si una función o solución es LI. Para soluciones revisar el wronskiano, si son funciones revisar la combinación lineal. Aplica lo mismo para vectores, vectores por sí solos, revisar la combinación lineal, y para vectores solución, revisar el Wronskiano.

Proposición (Fórmula de Abel)

Sean $y_1, ..., y_n$ n soluciones del sistema

$$y' = Ay$$

Entonces

$$W_{y_1,...,y_n} = W_{y_1,...,y_n}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr\ A(s) ds}$$

donde tr A es la traza de la matriz, es decir:

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definición (Dependencia e independencia lineal)

Las funciones $y_1, ..., y_n$ se dicen LD en I si existen constantes $c_1, ..., c_n$ no todas nulas tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t) = 0, \forall t \in I$$

Se dicen LI si no son LD.

Definición

Un conjunto de n soluciones LI del sistema

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

se llama conjunto fundamental

Teorema (Soluciones generales de sistemas no homogéneos)

Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular de la ecuación lineal no homogénea dada por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

en el intervalo abierto I, donde las funciones $\mathbf{P}$(t) y $\mathbf{f}$(t) son continuas. Sean $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada en I. Si $\mathbf{x}$(t) es cualquier solución de la ecuación homogénea en I, entonces existen valores $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

para toda t en I. Así primero hay que obtener la solución general del sistema homogéneo, y luego encontrar una solución particular del sistema no homogéneo.

Teorema (Soluciones del sistema homogéneo con eigenvalores)

Sea λ un eigenvalor (constante) de la matriz de coeficientes A del sistema lineal de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$$

Si $\mathbf{v}$ es un eigenvector asociado de λ, entonces:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

es una solución no trivial del sistema.

Observación: Como título debería decir Soluciones de x' = Ax con eigenvalores.

- Valores propios reales distintos. La solución general de x' = Ax está dada por:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

- Valores propios complejos: La solución x(t) vendría dada por:

$$x(t) = ve^{\lambda t}, \lambda = \alpha + i\beta$$
$$x(t) = (v_1 + iv_2)e^{\alpha t}(cos(\beta t) + isin(\beta t))$$
$$x_1(t) = Re\ x(t)$$
$$x_2(t) = Im\ x(t)$$
$$\lambda v_p \leftrightarrow \overline{\lambda} v_p$$

donde $\overline{\lambda}$ es el conjugado. Aquí la solución del sistema viene dada por

$$x(t) = C_3 e^{\alpha t}(v_1 cos(\beta t) - v_2 sen(\beta t)) + iC_4 e^{\alpha t}(v_1 sen(\beta t) + v_2 cos(\beta t))$$
$$u_1 = e^{\alpha t}(v_1 cos(\beta t) - v_2 sen(\beta t))$$
$$u_2 = e^{\alpha t}(v_1 sen(\beta t) + v_2 cos(\beta t))$$
$$x(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$$

Algoritmo (Eigenvalores incompletos de multiplicidad 2)

1. Encuéntrese primero una solucion $\mathbf{v}_2$ diferente de cero de la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

tal que:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

sea diferente de cero y por tanto sea un eigenvector $\mathbf{v}_1$ asociado con λ. A ese vector se le conoce como vector propio generalizado
2. Fórmense las dos soluciones independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}$$

de **x**' = **Ax** correspondiente a λ. Así

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Observación muy importante: Si se ve la fórmula del libro, hay una parte que está distinta, el libro está mal.

Los vectores solución de un sistema lineal homogéneo de n × n

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$$

pueden utilizarse para construir una matriz cuadrada $\mathbf{X} = \Phi(t)$ que satisface la ecuación diferencial matricial:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

Supóngase que $x_1(t), ..., x_n(t)$ son n soluciones L.I del sistema homogéneo. Se tiene

$$\Phi(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ ...\ x_n(t)]$$

la cual se llama matriz fundamental del sistema homogéneo. En términos de $\Phi(t)$, la solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + ... + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

del sistema **x**' = **Ax** puede escribirse como

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{c}$$
$$\mathbf{c} = [c_1\ ...\ c_n]^T$$

Si $\psi(t)$ es cualquier otra matriz fundamental, entonces cada vector columna de $\psi(t)$ es una combinación lineal de los vectores columna de $\Phi(t)$, se concluye que:

$$\psi(t) = \phi(t)\mathbf{C}$$

para alguna matriz C constante de n x n, invertible.

Teorema (Soluciones de la matriz fundamental)

Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Entonces la solución (única) del problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_o$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$$

donde

$$c = \Phi(t_0)^{-1}x_0$$

lo que se obtiene a partir de

$$x(t) = \Phi(t)c$$
$$x_0 = \Phi(t_0)c$$
$$c = \Phi(t_0)^{-1}x_0$$

Se define a la matriz exponencial como

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

donde la matriz solución de la ecuación diferencial matricial

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

con matriz de coeficiente A de n x n es una solución escalar de la ecuación diferencial de primer orden $x' = ax$. Si A es una matriz de n x n, entonces la matriz exponencial e^A es la matriz de n x n definida por la serie

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ...$$

Recordar la serie de Taylor de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Definición matriz exponencial

Sea $t_0 \in$ J y sea Φ una matriz fundamental del sistema (s) y' = Ay que satisface $\Phi(t_0) = I$. Entonces Φ se llama matriz exponencial en t_0 para (s) y la denotamos por e^{At}.

Teorema (Soluciones por matriz exponencial)

Si **A** es una matriz de n x n, entonces la solución del problema de valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

y esta solución es única. De este modo, la solución de los sistemas lineales homogéneos se reduce a calcular matrices exponenciales.

Corolario: $e^{At} = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$.

Observación: Si A es diagonalizable, entonces $\exists$ P invertible tal que $A = PDP^{-1}$.

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Observaciones

Sea D una matriz diagonal:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{d_n} \end{pmatrix}$$

Teorema (Calculo de e^{At})

Sean $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ los n eigenvectores generalizados L.I de la matriz A de n x n. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, sea $\mathbf{x}_i(t)$ la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\mathbf{u} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}t + ... + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

esto se obtiene de

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{u} = e^{(\lambda\mathbf{I}+A-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{(A-\lambda\mathbf{I})}\mathbf{u}$$

sustituyendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, el eigenvalor asociado λ y el rango r del eigenvector generalizado $\mathbf{u}_i$. Si se tiene la matriz fundamental $\Phi(t)$, entonces

$$e^{At} = \Phi(t)\phi(0)^{-1}$$

Teorema (Variación de parámetros)

Si $\psi(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en algún intervalo donde $\mathbf{P}$(t) y $\mathbf{f}$(t) son continuas, entonces la solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

está dada por

$$\mathbf{x}_p(t) = \psi(t) \int \psi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt$$

Así la solución general del sistema no homogéneo está dado por:

$$x(t) = \psi(t)c + \psi(t) \int \psi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt$$

Teorema

Sea $\phi(t)$ matriz fundamental del sistema homogéneo y' = A(t)y en I donde A(t) y f(t) son continuas. Entonces la solución particular del sistema y'(t) = A(t)y + f(t) está dada por

$$y_p(t) = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)f(t)dt$$

La solución general de y' = Ay + f está dada por

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)f(s)ds$$

Comentario

Si A es una matriz con coeficientes constantes, entonces ϕ tal que $\phi(0) = I$ y $\phi(t) = e^{tA}$ y podemos escribir la siguiente forma:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA}f(s)ds \rightarrow y(t) = e^{tA}y_0 \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t)A}f(s)ds$$

Observaciones:

- $e^{A+B} = e^A e^B \rightarrow$ se cumple solo si AB = BA, es decir, conmutan.
- $e^{(A)^{-1}} = e^{-A} \rightarrow$ siempre funciona.

Para utilizar el método de coeficientes indeterminados, se supone que el término no homogéneo $\mathbf{f}$(t) es una combinación lineal (con un vector de coeficientes constantes) de productos de polinomios, funciones exponenciales y senos y cosenos. Además, si se encuentra que la solución particular es LD, se debe multiplicar por la cantidad mínima de veces de forma que quede LI, además de agregar las soluciones LD.

Un sistema de ecuaciones diferenciales, en donde los valores de las derivadas son independientes o autónomas del tiempo t, se conoce como sistema autónomo.

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Se asume que F y G son continuas, derivables en una región R del plano xy. Las ecuaciones x = x(t), y = y(t) describen una curva solución parametrizada en el plano de la fase. Cualquier curva solución de este tipo se denomina trayectoria del sistema. Un punto crítico del sistema es es un punto tal que:

$$F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$$

Si (x*,y*) es un punto crítico del sistema, entonces las funciones constantes

$$x(t) = x^* \; y(t) = y^*$$

tienen derivadas igual a cero, y por tanto satisfacen el sistema de ecuaciones antes planteado. Una solución constante de este tipo se llama solución de equilibrio del sistema. Una forma de visualizar el sistema es construir un campo de pendientes en el plano de fase xy trazando los segmentos de línea con pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

o un campo direccional por el trazo de vectores que apuntan a la misma dirección en cada punto (x,y). Para poder estudiar cualitativamente el comportamiento de las soluciones, vamos a construir un diagrama donde aparecen los puntos críticos son una solución de curvas soluciones: **plano de fase**. Lo importante es que las trayectorias no se crucen en un punto. Los puntos se pueden clasificar en estable, inestable y asintoticamente estable. Así, el punto crítico x^* es **estable**, siempre que, para cada $\epsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ tal que

$$|x_0 - x^*| < \delta \rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon$$

para toda $t > 0$. Se dice **inestable** en caso contrario. El punto crítico x^* es **estable asintóticamente** si es estable, y además, cada trayectoria que inicia suficientemente cercana a (x^*, y^*) también se aproxima a (x^*, y^*) conforme t $\rightarrow +\infty$. Esto es, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x^*| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

En general el punto crítico (x^*, y^*) se llama nodo siempre que

- Ya sea que toda trayectoria se aproxime a (x^*, y^*) conforme t $\rightarrow +\infty$ o cada trayectoria se aleje de x^*, y^* conforme t $\rightarrow +\infty$
- Toda trayectoria sea tangente en (x^*, y^*) para alguna línea recta que pase por el punto crítico.

Se presenta ahora el comportamiento de las soluciones del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

cercano a un punto crítico aislado (x_0, y_0) donde $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Un punto crítico se llama **aislado** si alguna vecindad de éste no contiene otro punto crítico. Puede utilizarse el método del eingevalor-eigenvector para investigar el punto crítco de un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Con matriz de coeficientes constantes A. La naturaleza del punto crítico aislado (0,0) depende de si los dos eigenvalores diferentes de cero $\lambda_1 \; y \; \lambda_2$ de A son

- reales y diferentes con el mismo signo: Si ambos valores propios son positivos, se obtiene un nodo divergente, las curvas solución parten del origen. Si ambos valores propios son negativos es un nodo convergente, las curvas solución se acercan al origen.
- reales y diferentes con signos opuestos: Se obtiene un punto silla inestable
- reales e iguales: Depende de si la matriz de coeficiente tiene dos eigenvectores LI. Si es así, es divergente si $\lambda > 0$ y convergente si $\lambda < 0$.
- complejos conjugados con parte real diferente de cero: punto espiral
- números imaginarios puros: centro estable

Eigenvalores λ_1, λ_2 para un sistema linealizado	Tipos de puntos críticos del sistema casi lineal
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo impropio estable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo estable o punto espiral
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Punto silla inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo inestable o punto espiral
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo impropio inestable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a < 0)$	Punto espiral estable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a > 0)$	Punto espiral inestable
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$	Centro o punto espiral, estable o inestable

Figure 3.1: Clasificación puntos críticos sistema casi lineal

Eigenvalores de A	Tipo de punto crítico
Reales, diferentes, del mismo signo	Nodo impropio
Reales, diferentes, de signos opuestos	Punto silla
Reales e iguales	Nodo propio o impropio
Conjugados complejos	Punto espiral
Imaginarios puros	Centro

Figure 3.2: Clasificación puntos críticos sistema lineal

Teorema: Estabilidad de sistemas lineales

Sean λ_1 $y\lambda_2$ los eigenvalores de la matriz coeficiente A del sistema lineal de dos dimensiones

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

con ad - bc $\neq$ 0. Entonces el punto crítico (0,0) es:

- Asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas negativas.
- Estable pero no asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas cero
- Inestable si λ_1 o λ_2 tiene una parte real positiva.

Teorema: Estabilidad de sistemas casi lineales

Sean λ_1 y λ_2 los eigenvalores de la matriz de coeficientes del sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = a^*x + b^*y$$
$$\frac{dy}{dt} = c^*x + d^*y$$

con el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + r(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + s(x,y)$$

Entonces

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ son eigenvalores reales e iguales, por consiguiente el punto crítico (0,0) del sistema casi lineal es un nodo o un punto espiral, y es asintóticamente estable si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, e inestable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.
- Si λ_1 y λ_2 son imaginarios puros, entonces (0,0) es un centro o un punto espiral, y puede ser asintóticamente estable, estable o inestable.
- En caso contrario, el punto crítico (0,0) del sistema casi lineal es del mismo tipo y con la misma estabilidad que el punto crítico (0,0) del sistema lineal asociado.

Comentarios profesora

Estabilidad sistema lineal: Sea $\Delta = \det J$, $\tau = \text{tr } J$. $D = \tau^2 - 4\Delta$

- Caso 1: Valores propios reales distintos. $D > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2$. Tenemos dos vectores propios LI, v_1, v_2. La solución general u' = Ju es

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

  1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \leftrightarrow \tau < 0, \Delta > 0$: nodo estable, atractor.
  2. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \leftrightarrow \Delta < 0$: punto silla, inestable pero no repulsor
  3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leftrightarrow \tau > 0, \Delta > 0$: nodo inestable, repulsor

- Caso 2: Valores propios real doble. $D = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$
  - Si la multiplicidad geométrica es 2
    1. $\lambda_1 < 0 \leftrightarrow \tau < 0$: nodo estable, asintóticamente estable.
    2. $\lambda_1 > 0 \leftrightarrow \tau > 0$: nodo inestable, repulsor.
  - Si la multiplicidad geométrica = 1. v_1 = vector propio y W es el vector propio generalizado, la solución general es

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}(W + tv_1)$$

    1. $\lambda_1 < 0 \leftrightarrow \tau < 0$: nodo estable, asintóticamente estable
    2. $\lambda_1 > 0 \leftrightarrow \tau > 0$: nodo inestable,repulsor

- Caso 3:Valores propios complejos conjugados. D < 0, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. $v_1 = a + ib$

$$u(t) = e^{\alpha t}c_1(acos(\beta t) - bsin(\beta t)) + e^{\alpha t}c_2(bcos(\beta t) + asin(\beta t))$$

  1. $\alpha < 0 \leftrightarrow \tau < 0$: espiral estable, asintóticamente estable
  2. $\alpha > 0 \leftrightarrow \tau > 0$: espiral inestable, repulsor
  3. $\alpha = 0 \leftrightarrow \tau = 0$: centro estable, pero no es asintóticamente estable

Teorema 1: Sean λ_1, λ_2 los valores propios asociados del siguiente sistema, con ad - bc $\neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = dc + dy$$

(0,0) es

- asintóticamente estale si $Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_2) < 0$
- estable pero no asintóticamente estable si $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$
- inestable si λ_1 o λ_2 tiene parte real positiva

Teorema 2 (Hartman-Grobman): Sea el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + r(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = cd + dy + s(x, y)$$

Con λ_1, λ_2 los valores propios del sistema lineal asociado.

- $\lambda_1 = \lambda_2$ reales iguales
  1. (0,0) es un nodo o un punto espiral
     (a) asintóticamente estale si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
     (b) inestable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
- λ_1, λ_2 imaginarios puros
  - (0,0) es centro/punto espiral/ puede ser asintóticamente estable o estable o inestable
- si no es ninguna de las anteriores, (0,0) del sistema casi lineal es del mismo tipo con misma estabilidad que el sistema lineal.

Linealización

La idea es aproximar un sistema no lineal en un punto de equilibrio para poder predecir el comportamiento de la solución del sistema no lineal cerca de este punto. Si consideramos el siguiente sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

Sea x_0, y_0 un punto de equilibrio (aislado). Este sistema es equivalente al siguiente

$$\frac{du}{dt} = f(u+x_0, v+y_0)$$
$$\frac{dv}{dt} = g(u+x_0, v+y_0)$$

tiene a (0,0) como punto de equilibrio. Utilizando Taylor, obtenemos (para f y g)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}u + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}v + r(u,v)$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}u + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}v + s(u,v)$$

Tal que

$$\lim_{(0,0)} \frac{r(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{s(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

Así el sistema linealizado queda

$$u' = Ju$$
$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Siendo J la matriz jacobiana:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \end{pmatrix}$$

Una forma de recordar esto para no equivocarse es

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla^T f(x,y) & \nabla^T g(x,y) \end{pmatrix}$$

Al momento de hacer esto, debemos estudiar todos los puntos críticos. La profesora mencionó que siempre hay un ejercicio sobre linealización.

CAPÍTULO

4

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformación de Laplace $\mathcal{L}$ incluye la operación de integración y obtiene una nueva función $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ de una nueva variable independiente s.

La transformada de Laplace

Dada una función f(t) definida para toda t ≥ 0, la transformada de Laplace de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge. La transformación de Laplace es una operación lineal

Linealidad de la transformada de Laplace

Si a y b son constantes, entonces

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

para toda s tal que las transformadas de Laplace tanto de f como de g existen

Si F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces se llama f(t) a la transformada inversa de Laplace de F(s) y se escribe

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Función Gamma y características

Se define a la función Gamma como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Algunas de sus características son:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Función escalón unitario

Se define a la función escalón unitario o heaviside como

$$\text{u(t)} = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Transformadas básicas

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \mathcal{L}\{sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2} \qquad \mathcal{L}\{cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

$$\mathcal{L}\{senh(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2}$$

Recordar

$$senh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Existencia de la transformada de Laplace

Si la función f es continua por tramos para t ≥ 0, y de orden exponencial cuando t → +∞, entonces su transformada de Laplace F(s) = $\mathcal{L}${f(t)} existe. De manera más precisa, si f es continua por tramos y satisface la ecuación

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ para } t \geq T$$

entonces F(s) existe para toda s > c.

Nota: Se dice que la función f es de orden exponencial conforme t → +∞ si existen constante no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ para } t \geq T$$

Así, una función es de orden exponencial siempre que su incremento no sea más rápido que un múltiplo constante de alguna función exponencial con un exponente lineal.

Corolario

Si f(t) satisface la hipótesis del teorema anterior (existencia de la transformada de Laplace), entonces

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Unicidad de la transformada inversa de Laplace

Supóngase que las funciones f(t) y g(t) satisfacen la hipótesis del teorema de la existencia de la transformada de Laplace, de tal manera que sus transformadas de Laplace F(s) y G(s) existan. Si F(s) = G(s) para toda s > c (para alguna c), entonces f(t) = g(t) siempre que en [0, + ∞] tanto f como g sean continuas

Transformadas de derivadas

Supóngase que la función f(t) es continua y suave por tramos para $t \geqq 0$, y que es de orden exponencial cuando t → +∞, de manera que existen constante no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \text{ para } t \geqq T \tag{4.1}$$

Entonces, la L{f'(t)} existe para s > c, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Corolario: Transformada de derivadas de orden superior

Supóngase que las funciones f, f', f",...,$f^{(n-1)}$ son continuas y suaves por tramos para t ≧ 0, y que cada una de estas funciones satisface las condiciones dadas en (4.1) con los mismos valores de M y de c. Entonces, la $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe cuando s > c y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

Nota: Una forma mucho más sencilla de recordar esta fórmula (a mi parecer), es

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}f^{(i)}(0)$$

Transformadas de integrales

Si f(t) es una función continua por tramos para t ≧ 0 y satisface la condición de orden exponencial $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ para t ≧ T, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

para s > c. En forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Regla 1: Fracciones parciales de factores lineales

La parte de la descomposición de la fracción parcial de R(s), correspondiente al factor lineal s - a de multiplicidad n, es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

donde $A_1, A_2, ...,$ y A_n son constantes. Una forma más compacta de esto es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s-a)^i}$$

Regla 2: Fracciones parciales de factores cuadráticos

La parte de la descomposición de la fracción parcial correspondiente al factor cuadrático irreducible $(s-a)^2 + b^2$ de multiplicidad n es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{((s-a)^2 + b^2)^2} + ... + \frac{A_n s + B_n}{((s-a)^2 + b^2)^n}$$

Una forma más compacta de recordar esto es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i s + B_i}{((s-a)^2 + b^2)^i}$$

Traslación sobre el eje s

Si F(s) = $\mathcal{L}${f(t)} existe para s > c, entonces $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$ existe para s > a + c, y

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

De manera equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Así, la traslación $s \to s \to a$ en la transformada corresponde a la multiplicación de la función original de t por e^{at}.

Convolución de dos funciones

La convolución de f · g de funciones continuas por tramos f y g se define para t ≧ 0 como:

$$(f \cdot g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

La propiedad de convolución

Supóngase que f(t) y g(t) son continuas por tramos para t ≧ 0, y que $|f(t)|$ y $|g(t)|$ están acotadas por Me^{ct} conforme $t \to +\infty$. Entonces la transformada de Laplace de la convolución f(t) · g(t) existe para s > c, más aún,

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) \cdot g(t)$$

Derivación de transformadas

Si f(t) es continua por tramos para t ≧ 0 y $|f(t) \leqq Me^{ct}$ conforme t $\to +\infty$, entonces

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s)$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

De forma más general

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

para n = 1,2,3...

Integración de transformadas

Supóngase que f(es) es continua por tramos para t ≧ 0, que f(t) satisface

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) \; \exists \text{ y es finito}$$

y que $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme t $\to +\infty$. Entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

para s > c. En forma equivalente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\right\}$$

Traslación en el eje t

Si la $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para s > c, entonces

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$$

para $s > c + a$

Transformadas de funciones periódicas

Sea f(t) una función periódica con periodo p y continua por tramos para t ≧ 0. Entonces la transformada F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para s > 0 y está dada por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt$$