Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2024

Interrogación 1 MAT1640
PAUTA

1. Encuentre una solución implícita del PVI

$$\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos(x)-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y\left(y+\operatorname{sen}(x)\right) \quad , \quad y(0)=1.$$

Una solución:

Reordenando la ecuación obtenemos

$$-y^2-y\operatorname{sen}(x)+\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos(x)-2xy\right)\frac{dy}{dx}=0$$

y como

$$\partial_y -y^2-y\operatorname{sen}(x)=-2y-\operatorname{sen}(x)$$
$$\partial_x \frac{1}{1+y^2}+\cos(x)-2xy=-\operatorname{sen}(x)-2y$$

vemos que la EDO es exacta. Tenemos entonces

$$F=\int -y^2-y\operatorname{sen}(x)dx+g(y)=-xy^2+y\cos(x)+g(y)$$

y

$$\frac{1}{1+y^2}+\cos(x)-2xy=\partial_y F=\partial_y\left(-xy^2+y\cos(x)+g(y)\right)=-2xy+\cos(x)+g'(y)$$

de modo que

$$g'(y)=\frac{1}{1+y^2}\Rightarrow g(y)=\arctan(y).$$

Luego,

$$F=-xy^2+y\cos(x)+\arctan(y)$$

y obtenemos las soluciones implicitas

$$-xy^2+y\cos(x)+\arctan(y)=C.$$

Para satisfacer el PVI necesitamos

$$0+1+\arctan(1)=C\Rightarrow C=1+\frac{\pi}{4}$$

así que la solución buscada es

$$-xy^2+y\cos(x)+\arctan(y)=1+\frac{\pi}{4}$$

Observación: de manera completamente análoga se podría haber calculado

$$F=\int \frac{1}{1+y^2}+\cos(x)-2xydy+g(x)=\arctan(y)+y\cos(x)-xy^2+g(x)$$

y luego

$$-y^2 - y\,\mathrm{sen}(x) = \partial_x F = -y\,\mathrm{sen}(x) - y^2 + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g = 0$$

obteniendo así el mismo F.

Asignación de puntaje:

- Mostrar que la EDO es exacta usando criterio de exactitud: **1 punto**
- Encontrar una expresion correcta para F integrando: **1,5 puntos**
- Encontrar una ecuación correcta para g derivando: **1,5 punts**
- Determinar correctamente g: **1 punto**
- Encontrar el valor de C correcto (debe calcular arctan(1)): **0,5 punto**
- Exhibir la solución del PVI: **0,5 punto**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, de **1 punto** o **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

2. Considere la EDO

$$u'(t) = u - u^3.$$

Esta ecuación es útil en el modelamiento de interfaces, en donde $u = 1$ y $u = -1$ se interpretan como dos estados opuestos.

a) Encuentre y clasifique los puntos críticos.

b) Encuentre una familia de soluciones a esta EDO.

Una solución:

Los puntos críticos son las soluciones de $u - u^3 = 0$, es decir $c = 0$, $c = 1$, y $c = -1$. Para clasificar los puntos críticos podemos hacer una tabla de signos

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
u	$-$	$-$	$+$	$+$
$1 - u$	$+$	$+$	$+$	$-$
$1 + u$	$-$	$+$	$+$	$+$
$u - u^3$	$+$	$-$	$+$	$-$

u observar que si $f(u) = u - u^3$ entonces $f'(u) = 1 - 3u^2$ y

$$f'(0) = 1 > 0 \quad , \quad f'(-1) = f'(1) = -2 < 0.$$

En cualquier caso se concluye que $c = 1$ y $c = -1$ son atractores, y entonces asintoticamente estables, mientras que $c = 0$ es repelente, y entonces inestable.

Para encontrar una familia de soluciones podemos usar que las EDO es de Bernoulli. Con $v = u^{-2}$ se observa que

$$v' = -2u^{-3}u' = -2u^{-3}\left(u - u^3\right) = -2u^{-2} + 2 = -2v + 2 \Rightarrow v' + 2v = 2$$

la cual es lineal con factor integrante

$$\rho = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}v\right) = v'e^{2t} + 2ve^{2t} = 2e^{-2t} \Rightarrow e^{2t}v = \int 2e^{2t}dt \Rightarrow v = 1 + Ce^{-2t}.$$

Volviendo a la variable original

$$u^{-2} = 1 + Ce^{-2t} \Rightarrow |u| = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$$

de donde obtenemos la familia

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$$

Observación: La EDO también es separable, por lo que se podría haber calculado

$$\frac{1}{u - u^3}du = dt \Rightarrow \int \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-u} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}du = \int dt$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right| = t + C \Rightarrow \frac{u^2}{1-u^2} = C_1e^{2t} \Rightarrow u^2 = \frac{C_1e^{2t}}{1 + C_1e^{2t}} = \frac{1}{C_2e^{-2t} + 1}$$

lo cual produce un resultado equivalente al anterior.

Asignación de puntaje:

- Identificar correctamente los puntos críticos: **0,1 puntos** por cada uno.
- Clasificar justificada y correctamente los puntos críticos : **0,4 puntos** por cada uno.
- Identificar la sustitución correcta v / escribir las integrales a resolver: **0,5 puntos**
- Calcular correctamente el factor integrante / descomponer en fracciones parciales: **1 punto**
- Calcular correctamente v / integrar correctamente: **1,5 puntos**
- Volver a la variable original u / tomar exponenciales para despejar u de los logaritmos: **0,5** puntos
- Exhibir explicitamente al menos una familia de soluciones: **1 punto**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, de **1 punto** o **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

3. La EDO

$$mv' = mg - kv$$

modela la caida libre con resistencia del aire de una masa $m > 0$, sujeta a la fuerza de gravedad $g > 0$, y en donde la resistencia del aire se considera proporcional a la velocidad v de la masa (con constante de proporcionalidad $k > 0$).

a) Encuentre y clasifique los puntos críticos.

b) Encuentre la solución general de la EDO.

c) La "velocidad terminal" v_T de una solución $v(t)$ está definida por

$$v_T = \lim_{t\to\infty} v(t).$$

Muestre, calculando el límite, que v_T es el mismo para todas las soluciones de la EDO.

Una solución:

El único punto crítico es $c = \dfrac{mg}{k}$ el cual es atractor, y entonces asintóticamente estable. Esto se puede observar con una tabla de signos u observando que $\dfrac{d}{dv}(g - vk/m) = -k/m < 0$.

Para resolver la EDO observemos que esta es equivalente a $v' + \dfrac{k}{m}v = g$, es decir, es lineal. El factor integrante es

$$\rho = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

y entonces

$$\frac{d}{dt}e^{\frac{k}{m}t}v = ge^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow e^{\frac{k}{m}t}v = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C \Rightarrow v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

es la solución general en $\mathbb{R}$.

Finalmente tenemos

$$v_T = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k} + C \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{mg}{k} + C \cdot 0 = \frac{mg}{k}$$

de donde se concluye que v_T es el mismo para todas las soluciones.

Observación: La EDO también es separable por lo que se podría haber calculado

$$\int \frac{m}{mg - kv}dv = \int dt \Rightarrow -\frac{m}{k}\ln|mg - kv| = t + C \Rightarrow |mg - kv| = C_1e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow v = \frac{mg}{k} + C_2e^{-\frac{k}{m}t}$$

Asignación de puntaje:

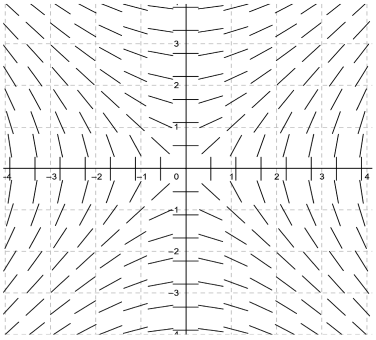
- Identificar correctamente el puntos crítico: **0,5 puntos**
- Clasificar justificada y correctamente el punto crítico : **0,5 puntos**
- Calcular correctamente el factor integrante / integrar correctamente: **2 puntos**
- Calcular correctamente v: **2 puntos**
- Calcular correctamente el límite v_T (debe desaparecer la constante arbitraria): **1 punto**

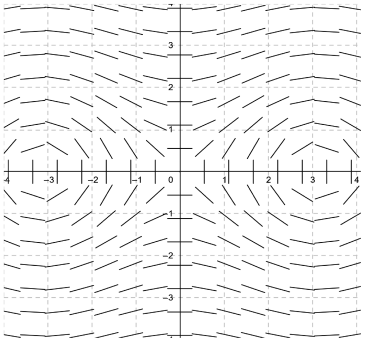
*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, de **1,5 puntos**, **1 punto** o **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

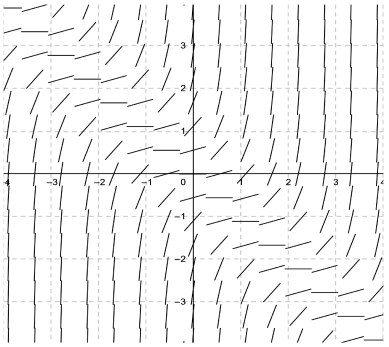
4. Considere la EDO

$$yy' = \text{sen}(x)$$

a) Identifique cuál de los siguientes corresponde al campo de pendientes de esta EDO:


A)


B)


C)

b) Encuentre una familia de soluciones de esta EDO.

c) Suponga se impone la condición inicial $y(a) = b$, transformando la EDO en un PVI. Determine para qué valores de a y b se puede garantizar la existencia de una única solución del PVI en un intervalo que contiene a, y exhiba esta solución.

Una solución:

El campo de pendientes es el B). Esto se puede observar por ejemplo observando que las isoclinas son $y = \frac{\text{sen}(x)}{c}$, y que en particular los segmentos de pendiente 1 deben estar en $y = \text{sen}(x)$, lo cual solo se condice con B).

La EDO es separable. Calculamos

$$ydy = \text{sen}(x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\cos(x) + C \Rightarrow |y| = \sqrt{C_1 - 2\cos(x)}$$

de donde obtenemos la familia

$$y = \pm\sqrt{C_1 - 2\cos(x)}.$$

Observe que

$$f(x,y) = \frac{\text{sen}(x)}{y} \quad , \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{\text{sen}(x)}{y^2}$$

son ambas continuas siempre y cuando $y \neq 0$. Por lo tanto, se puede garantizar la existencia de una única solución local para el PVI con condición inicial $y(a) = b$ para $b \neq 0$ y cualquier $a \in \mathbb{R}$. Para estos valores de a y b podemos calcular

$$b^2 = C_1 - 2\cos(a) \Rightarrow C_1 = b^2 + 2\cos(a)$$

por lo que la solución garantizada por el Teorema de Picard es

$$y = \begin{cases} \sqrt{b^2 + 2\cos(a) - 2\cos(x)} & , b > 0 \\ -\sqrt{b^2 + 2\cos(a) - 2\cos(x)} & , b < 0. \end{cases}$$

Asignación de puntaje:

- Identificar correctamente el campo de pendientes: **1 punto**
- Identificar la EDO es separable : **0,5 puntos**
- Integrar correctamente: **0,5 puntos**

- Despejar correctamente y: **1 puntos**
- Exhibir correctamente f y $\partial_y f$: **0,5 puntos**
- Identificar correctamente donde f y $\partial_y f$ son continuas: **0,5 puntos**
- Indicar que el Teorema de Picard solo requiere $b \neq 0$: **1 punto**
- Exhibir la solución correcta: **1 punto**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*