MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 15)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior

Concluimos el estudio de 2 métodos para encontrar soluciones particulares a ecuaciones lineales no-homogéneas.

1. Para ecuaciones con coeficientes constantes:

$\longrightarrow$ método de coeficientes indeterminados

Obs. si aplica solo si el lado derecho $f(x)$ es combinación lineal de productos de polinomios, exponenciales, sen(kx) o cos(kx).

Idea:
- Separar la ecuación en varias, una para cada sumando de $f(x)$.
- Para cada una de esas ecuaciones, proponer una solución particular con forma similar a f (recordar que hay 2 reglas)
- La solución particular final resulta de sumar todas las encontradas anteriormente.

2. Para ecuaciones generales de segundo orden:

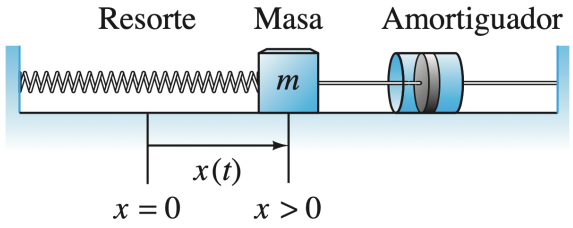
$\longrightarrow$ método de variación de parámetros

Idea:
- Calcular el wronskiano de soluciones l.i. de la ecuación homogénea.
- la solución particular está dada por la fórmula

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,dx.$$

Aplicamos lo aprendido sobre EDO's lineales para estudiar el **modelo de vibraciones mecánicas**.

Recordemos el sistema **masa-resorte-amortiguados**:



$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

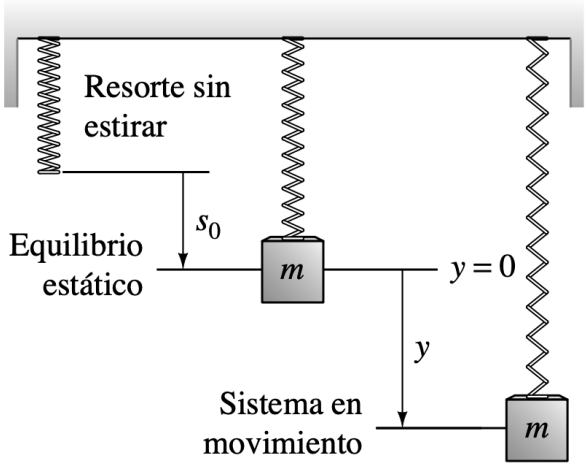
$x(t)$: desplazamiento horizontal de la masa con respecto al equilibrio
m: masa del objeto
c: constante de amortiguamiento
k: constante del resorte
$F(t)$: fuerza externa

Estudiaremos distintos escenarios:

- Movimiento libre no amortiguado $(F(t) = c = 0, \quad k > 0)$
- Movimiento libre amortiguado $(F(t) = 0, \quad k, c > 0)$
- Movimiento forzado $(F(t) \neq 0, \quad k, c > 0)$

Otras situaciones donde aparece el modelo de vibraciones mecánicas:

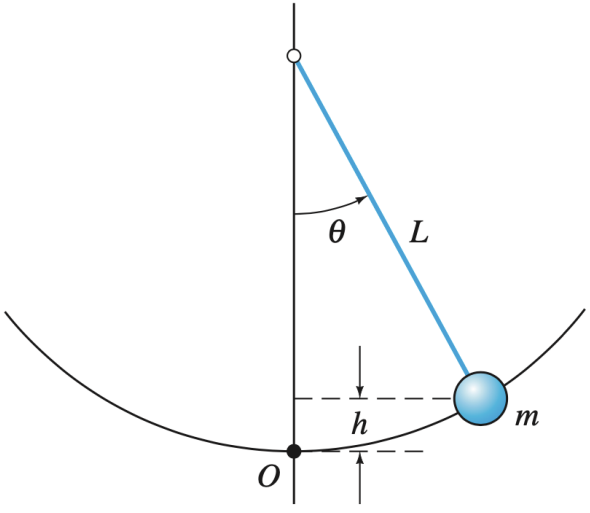
Masa suspendida por resorte



$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

$y(t)$: desplazamiento vertical en torno a equilibrio.
c: constante de fricción
$F(t)$: fuerza externa (distinta a la gravedad)

Péndulo simple



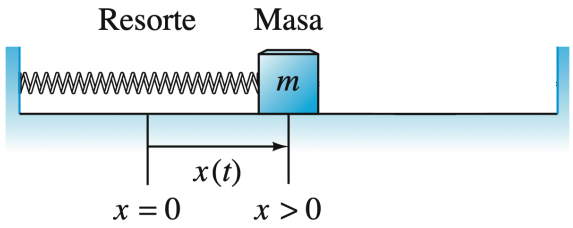
$$\theta'' + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0$$

$\theta(t)$: ángulo cor respecto a la vertical
L: largo del péndulo

Aproximación lineal: si $k = g/L$

$$\theta'' + k\theta = 0 \qquad \text{(sin fricción)}$$
$$\theta'' + c\theta' + k\theta = 0 \quad \text{(con fricción)}$$

Movimiento libre no amortiguado

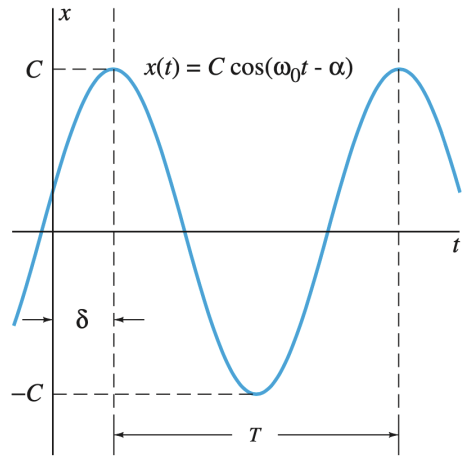


$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Raíces polinomio característico: $r = \pm i\omega_0$

Solución general: $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\text{sen}(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha)} \quad \textbf{(movimiento armónico simple)}$$



Constantes:

Amplitud: C

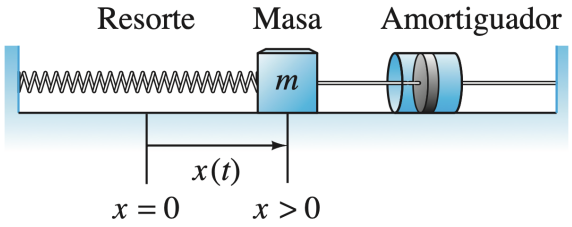
Frecuencia angular: ω_0

Ángulo de fase: α

Otras cantidades relevantes:

periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$; frecuencia: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$; tiempo de retraso: $\delta = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$

Movimiento libre amortiguado



$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}$$

Raíces polinomio característico: $r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$\Rightarrow$ la solución general depende del signo de $p^2 - \omega_0^2 = \dfrac{c^2 - 4km}{4m^2}$

$\Rightarrow$ el signo cambia cuando $c = \underbrace{\sqrt{4km}}_{c_{cr}}$ (**amortiguamiento crítico**)

$\Rightarrow$ hay 3 casos: $c > c_{cr}$, $c = c_{cr}$, $c < c_{cr}$.

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso sobreamortiguado: $c > c_{cr} \quad (p^2 > \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$r_1 = -p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ reales, distintas y negativas

Solución general: $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Como $r_1, r_2 < 0, \qquad x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso críticamente amortiguado: $c = c_{cr} \quad (p^2 = \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$$r = -p \quad \text{real, repetida y negativa}$$

Solución general: $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-pt}$

Como $p > 0$, $\quad x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso subamortiguado: $c < c_{cr} \quad (p^2 < \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$$r = -p \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}_{\omega_1} \quad \text{complejas conjugadas}$$

Solución general: $x(t) = (A\cos(\omega_1 t) + B\text{sen}(\omega_1 t))e^{-pt}$

o también $x(t) = \underbrace{Ce^{-pt}}_{A(t)}\cos(\omega_1 t - \alpha)$

pseudo-frecuencia angular: $\omega_1 \ (< \omega_0)$ pseudo-periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

amplitud variable: $A(t)$

Como $p > 0$, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

Movimiento forzado

1. Oscilaciones forzadas sin amortiguación.

Nos interesa estudiar el modelo con fuerza externa periódica:

$$mx'' + kx = \underbrace{F_0 \cos(\omega t)}_{F(t)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aplicaciones: movimiento de lavadoras; oscilaciones de un puente.

Parámetros importantes:

frecuencia natural: ω_0; frecuencia externa: ω.

a) Solución general para $\omega \neq \omega_0$:

$$x(t) = \underbrace{C\cos(\omega_0 t - \alpha)}_{x_c(t)} + \underbrace{\left(\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos(\omega t)}_{x_p(t)}$$

Resonancia: La amplitud forzada (de $x_p(t)$) es constante y tal que:

$$\left|\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right| \to \infty \quad \text{cuando} \quad \omega \to \omega_0.$$

b) Solución general para $\omega = \omega_0$:

$$x(t) = x_c(t) + \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} t \right) \text{sen}(\omega_0 t)$$

Resonancia pura: la amplitud forzada es variable y tal que

$$\frac{F_0}{2m\omega_0} t \to \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

2. Oscilaciones forzadas con amortiguación.

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}_{F(t)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p = \frac{c}{2m}$$

Solución general: $x(t) = x_c(t) + \underbrace{C\cos(\omega t - \alpha)}_{x_p(t)}$

Con amplitud forzada:

$$C = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}}$$

Resonancia: la amplitud forzada es constante y posee un valor máximo como función de la frecuencia externa ω.

Resonancia práctica: máximo valor de C como función de ω.