PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
2024, Segundo Semestre.

Examen
Ecuaciones Diferenciales

1. Un profesor de matemáticas aporta 4 millones anuales a un fondo de pensiones. El fondo renta un 7 % anual de manera continua. Luego de 40 años el profesor comienza a retirar 36 millones anualmente. Si denotamos por $A(t)$ el ahorro en el tiempo t medido en años tenemos que $A(0) = 0$, y para t en $[0, 40]$ el ahorro cumple la ecuación diferencial

$$A' = 0,07A + 4,$$

y para $t \geq 40$ cumple la ecuación diferencial

$$A' = 0,07A - 36.$$

¿Se le acaba en algún momento el dinero al profesor?

Indicación: puede aproximar $e^{0,07\cdot 40}$ por 16.

Solución: Primero calculemos la solución al PVI $A' = 0,07A + 4$ con $A(0) = 0$. Vemos que el punto crítico de esta ecuación es $-400/7$, y luego la solución general es

$$A(t) = Ce^{0,07t} - \frac{400}{7}. \tag{1}$$

Reemplazando la condición inicial nos da que

$$A(t) = \frac{400}{7}e^{0,07t} - \frac{400}{7}. \tag{2}$$

Después de 40 años el profesor tiene $A(40) = \frac{400}{7}(e^{0,07\cdot 40} - 1)$ millones de pesos, pero la ecuación que satisface el ahorro $A(t)$ desde los 40 años en adelante es

$$A' = 0,07A - 36.$$

Esta ecuación tiene un único punto de equilibrio en $A_0 = 3600/7$. Como el lado derecho de la ecuación es creciente en A si $A(40)$ es mayor o igual a A_0 entonces $A(t)$ es igual o mayor a A_0 para para todo $t \geq 40$. Verifiquemos que $A(40) > A_0$,

$$A(40) = \frac{400}{7}(e^{0,07\cdot 40} - 1) \geq \frac{400}{7} \cdot 15 = \frac{6000}{7} > \frac{3600}{7} = A_0.$$

Por lo tanto al profesor nunca se le acaba el dinero, más aún sus ahorros crecen indefinidamente.

Corrección:

a) 0,4 puntos por calcular la solución 2.

b) 0,2 puntos por calcular cuanto dinero tiene después de 40 años.

c) 0,6 puntos por argumentar que el dinero no se acaba nunca, lo pueden hacer con el argumento de la pauta o resolviendo la segunda ecuación diferencial y mostrar que la solución no es decreciente.

2. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + a$$

donde a es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores de a la línea de fase es igual (cualitativamente hablando)?

b) ¿En qué valores de a la línea de fase muestra cambios cualitativos?

c) Clasifique los puntos críticos en función del parámetro a.

Solución: Para $a > 0$ no hay puntos críticos y las soluciones siempre crecen. Para $a < 0$ hay dos puntos críticos, el menor es un sumidero y el mayor es una fuente. Luego la linea de fase no cambia en terminos cualitativos $a > 0$, y tampoco cambia para $a < 0$.

Para $a = 0$ hay solo un punto crítico en 0. Luego para $a = 0$ hay un cambio cualitativo en la linea de fase que pasa de no tener puntos críticos a tener dos puntos críticos.

Los puntos críticos para $a > 0$ ya fueron clasificados más arriba, y para $a = 0$ el punto crítico es un nodo.

Corrección:

a) 0,4 puntos por identificar que para $a > 0$ y para $a < 0$ la linea de fase no cambia cualitativamente hablando.

b) 0,4 puntos por identificar que en $a = 0$ hay un cambio cualitativo.

c) 0,4 puntos por clasificar los puntos críticos para $a \geq 0$.

3. Considere el sistema $\overrightarrow{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}$. Calcule la solución general del sistema.

Solución: Denotemos por e_1, e_2, y e_3 los vectores canónicos en $\mathbb{R}^3$, y por A la matriz del sistema. Tenemo que A tiene a 1 como valor propio repetido de multiplicidad 3 y a los vectores e_1 y e_3 como vectores propios. Luego, $e^t e_1$ y $e^t e_3$ son soluciones l.i. del sistema. Además, el vector e_2 cumple que $(A - I)e_2 = e_1$ por lo que $e^t(te_1 + e_2)$ es otra solución l.i. del sistema. Por lo tanto la solución general es

$$\overrightarrow{x}(t) = c_1 e^t e_1 + c_2 e^t (te_1 + e_2) + c_3 e^t e_3,$$

con c_1, c_2 y c_3 son constantes reales.

Corrección:

a) 0,4 puntos por las soluciones $e^t e_1$ y $e^t e_3$.

b) 0,6 puntos por la solución $e^t(te_1 + e_2)$.

c) 0,2 puntos por la solución general.

4. Considere el sistema $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x} + \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \end{bmatrix}$, donde $A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Encuentre la solución con condición inicial $\overrightarrow{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sabiendo que

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-t} + 7e^{5t} & 7e^{-t} - 7e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & 7e^{-t} - e^{5t} \end{bmatrix}$$

5. Encuentre los puntos críticos del sistema

$$x' = x - y$$
$$y' = x^2 - y$$

y clasifique de acuerdo a su tipo (centro, nodo propio, nodo impropio, espiral, silla) y diga si es estable o inestable. Si una clasificación completa no es posible, diga las posibilidades del tipo de punto crítico.