PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (MAT1640)
Interrogación 3
Martes 3 de Noviembre, 2015, a las 18.30 horas

1. Calcule e^{tA} para todo $t \in \mathbb{R}$ y donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

   Solución:

   El polinomio característico de A esta dado por

   $$|A - \lambda| = (-1 - \lambda)(5 - \lambda) + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

   Entonces los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. La matriz A es entonces diagonalizable, pues tiene tamaño 2×2 y tiene dos los valores propios distintos.

   El vector $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ ssi

   $$(A - \lambda_1)\mathbf{v}_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2a + 2b = 0 \iff b = a$$

   Tomando $a = 1$ obtenemos $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   El vector $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ ssi

   $$(A - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -4c + 2d = 0 \iff d = 2c$$

   Tomando $c = 1$ obtenemos $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Por la teoría general sabemos que

   $$A = UDU^{-1} \quad \text{y} \quad e^{tA} = Ue^{tD}U^{-1}$$

   donde $U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $tD = diag(t\lambda_1, t\lambda_2) = diag(t, 3t)$.

   Ahora usamos

   $$U^{-1} = \frac{1}{|U|} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   para concluir que

   $$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ -2e^{3t} + 2e^t & -e^t + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

   Solución alternativa:

   $$e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}$$

   donde $\Psi(t)$ es la matrix fundamental del sistems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$:

   $$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 & e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

2. Resuelva el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ y_1(1) = 1,\ y_2(1) = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico de A esta dado por $|A - \lambda| = (1 - \lambda)^2$.

Entonces A soló tiene 1 valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

El vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda = 1$ ssi

$$(A - \lambda)\mathbf{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = 0$$

Tomando $b = 1$ obtenemos $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces la multiplicidad geométrica es 1, pues A sólo tiene 1 vector propio linealmente independiente. En particular: A no es diagonalizable. Una solución no-cero del sistema (1) esta dada por

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Se puede obtener una otra solución $\mathbf{y}_2$ de (1) que es LI con $\mathbf{y}_1$ en la siguiente manera:

$$\mathbf{y}_2(t) = te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{w}$$

donde $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ es un vector propio generalizado:

$$(A - \lambda)\mathbf{w} = \mathbf{v} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff 0 = 0, c = 1$$

Tomando $d = 0$ obtenemos $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{y}_2(t) = te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

La solución general del (1) es

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$$

Para determinar las constantes c_1, c_2 utilizamos la condición inicial:

$$\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff c_2 e = 1,\ c_1 e + c_2 e = 2 \iff c_2 = c_1 = e^{-1}$$

Entonces la solución del problema de Cauchy es

$$\mathbf{y} = e^{-1}\mathbf{y}_1 + e^{-1}\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{t-1} \\ (t+1)e^{t-1} \end{pmatrix}$$

3. Resuelva mediante la transformada de Laplace las ecuaciones diferenciales

$$x'' + 4x = -u_{2\pi}\cos(t)$$

y

$$x'' + x = \delta + \delta_{2\pi}$$

sujetos a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Notación: $u_a(t) = u(t-a)$ es la función de Heaviside (i.e. $u_a(t) = 0$ si $t < a$ y $u_a(t) = 1$ para $t \geq a$), $\delta(t)$ es la function delta de Dirac y $\delta_a(t) = \delta(t-a)$ es la versión trasladada con centro a.

Solución:

Vamos primero calcular la transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Aplicando la transformada de Laplace y usando las condición de frontera y Regla (9) se obtiene en ambos casos:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

Primera ecuación:

Aplicando la Regla (4) se obtiene

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-2\pi)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},$$

y con Regla (14) además

$$\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos t\} = e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

(observe que $\cos(t-2\pi) = \cos(t)$)

Entonces después de aplicar la transformada de Laplace obtenemos la siguiente ecuación algebraica para $X(s)$:

$$s^2X(s) + 4X(s) = -e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

Es decir:

$$X(s) = -e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+4}\frac{s}{s^2+1}$$

Usando que

$$\frac{1}{s^2+4}\frac{s}{s^2+1} = -3\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

se obtiene

$$X(s) = \frac{1}{3}e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

Por la tanto:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{3}u_{2\pi}(t)(\cos(2t) - \cos t)$$

Segunda ecuación:

Con Regla (6) se obtiene

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-as}$$

Entonces después de aplicar la transformada de Laplace obtenemos la siguiente ecuación algebraica para $X(s)$:

$$s^2X(s) + X(s) = 1 + e^{-2\pi s}$$

Es decir:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

Usando las Reglas (4), (13) y el hecho que $\text{sen}(t)$ es 2π-periodico se obtiene

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \text{sen}(t) + u_{2\pi}(t)\,\text{sen}(t) = (1 + u_{2\pi}(t))\,\text{sen}(t)$$

4. Resuelva el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + \int_0^t x(t-\tau)d\tau = f(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

y donde la función $f(t)$ esta dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 2-t & 1 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$$

Solución:

Vamos primero calcular la transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$.

Usando la condición de frontera Regla (8) se obtiene

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

La transformada del integral se puede calcular usando Regla (1) y la regla para la convolución (10):

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(t-\tau)d\tau\} = \mathcal{L}\{x(t) \star 1\} = X(s)\mathcal{L}\{1\} = \frac{X(s)}{s}$$

Para calcular $F(s) = \mathcal{L}f$ observamos primero que

$$f(t) = (1 - u_1(t)) + (2-t)(u_1(t) - u_2(t)) = 1 - (t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

Por lo tanto, por Reglas (4) y (11):

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Entonces después de la aplicar la transformada de Laplace obtenemos la siguiente ecuación algebraica para $X(s)$:

$$sX(s) - 1 + 2X(s) + X(s)/s = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Es decir:

$$X(s)(s+1)^2/s = 1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{e^{-s}}{s(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}$$

Usando

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

se obtiene:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - (\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s+1} - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}) + (\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2})$$

Usando las Reglas (3), (4) y (11) se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)}\} = e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\} = u_1(t)(1 - e^{-(t-1)} - e^{-(t-1)}(t-1)) = u_1(t)(1 - te^{1-t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\} = u_2(t)(1 - e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)}(t-2)) = u_2(t)(1 + (1-t)e^{2-t})$$

Entonces la solución del problema de Cauchy es

$$x(t) = e^{-t} - u_1(t)(1 - te^{1-t}) + u_2(t)(1 + (1-t)e^{2-t})$$