Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2026

Interrogación 2 MAT1640
PAUTA

1. *a*) Una cierta EDO lineal homogénea de coeficientes constantes $Lu = 0$ tiene ecuación auxiliar

$$m^3(m-1)^2(m+1)(m-(3+i))^2(m-(3-i))^2 = 0.$$

Determine la solución general de la EDO.

b) Considere la EDO

$$4x^2u'' + u = 0$$

en $(0, \infty)$. Determine el valor de r para el cual $u(x) = x^r$ es solución. Determine luego la solución general de la EDO en $(0, \infty)$.

Una solución:

a) La solución general es

$$u(x) = c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x+c_5xe^x+c_6e^{-x}+c_7e^{3x}\cos(x)+c_8e^{3x}\,\mathrm{sen}(x)+c_9xe^{3x}\cos(x)+c_{10}xe^{3x}\,\mathrm{sen}(x).$$

b) Debemos tener

$$0 = 4r(r-1)x^r + x^r \Rightarrow 0 = 4r^2 - 4r + 1 = (2r-1)^2 \Rightarrow r = 1/2$$

de modo que $x^{1/2}$ es solución. Para encontrar una segunda solución LI calculamos

$$u(x) = x^{1/2}\int \frac{e^{\int 0dx}}{x}dx = x^{1/2}\int \frac{1}{x}dx = x^{1/2}\ln x.$$

Luego, la solución general es

$$u(x) = c_1x^{1/2} + c_2x^{1/2}\ln x.$$

Asignación de puntaje:

- $0,2$ puntos por cada solución LI de la parte *a*).
- Encontrar valor de r: 1 punto.
- Fórmula para segunda solución: 1 punto.
- Encontrar segunda solución: 1 punto.
- Escribir solución general: 1 punto.

2. Encuentre la solución general de

$$u''' + 4u' = \sec(2x)$$

en $(-\pi/4, \pi/4)$.

Una solución:

La ecuación auxiliar es $0 = m^3+4m = m(m^2+4)$ de donde la solución general del problema homogeneo es

$$u_c(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x$$

Para encontrar una solución particular usamos variación de parámetros. Tenemos

$$W = \det \begin{bmatrix} 1 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{bmatrix} = 8$$

$$W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ \sec 2x & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{bmatrix} = 2\sec 2x$$

$$W_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & \sec 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{bmatrix} = -2$$

$$W_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & \sec 2x \end{bmatrix} = -2\tan 2x$$

de modo que

$$y_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\sec 2x}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x|$$
$$y_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_2 = -\frac{x}{4}$$
$$y_3' = \frac{W_3}{W} = -\frac{\tan 2x}{4} \Rightarrow y_3 = \frac{1}{8}\ln|\cos 2x|.$$

Luego, una solución particular es

$$u_p(x) = \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x \ln|\cos 2x|$$

y la solución general es

$$u(x) = u_c + u_p.$$

Asignación de puntaje:

- Ecuación auxiliar: $0,5$ puntos.
- Soluciones de la ecuación auxiliar: $0,5$ puntos.
- Soluciones del problema homogeneo: $0,5$ puntos.
- Calcular W y W_i: $0,5$ puntos cada una.
- Obtener y_1, y_2, y_3: $0,5$ puntos cada una.
- Solución particular: $0,5$ puntos.
- Solución general: $0,5$ puntos.

3. Una masa de $2kg$ se sujeta a un resorte de constante $32N/m$. Comenzando en $t = 0$ la masa descansa en equilibrio, pero se le aplica una fuerza externa $f(t) = 40te^{-2t}$. Asuma además que no hay amortiguamiento. Determine la posición de la masa para $t \geq 0$. Cuando t es muy grande ¿puede indicar un valor aproximado para la amplitud de la respuesta?.

Una solución:

El problema es modelado por

$$2x'' + 32x = 40te^{-2t} \Leftrightarrow x'' + 16x = 20te^{-2t} \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación auxiliar es $m^2 + 16 = 0$ de modo que la solución del problema homogeneo es

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t.$$

Para encontrar una solución particular usamos coeficientes indeterminados. Buscamos

$$x_p = (A + Bt)e^{-2t}$$

con

$$20te^{-2t} = 4(A + Bt)e^{-2t} - 4Be^{-2t} + 16(A + Bt)e^{-2t} = (20A - 4B + 20Bt)\, e^{-2t}$$

de donde

$$\begin{cases} 20A - 4B & = 0 \\ 20B & = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = 1/5 \\ B & = 1 \end{cases}.$$

Luego la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t + \left(\frac{1}{5} + t\right) e^{-2t}.$$

Para resolver el PVI se requiere

$$\begin{cases} 0 & = c_1 + 1/5 \\ 0 & = 4c_2 + 1 - 2/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 & = -1/5 \\ c_2 & = -3/20 \end{cases}.$$

de modo que

$$x(t) = -\frac{1}{5} \cos 4t - \frac{3}{20} \operatorname{sen} 4t + \left(\frac{1}{5} + t\right) e^{-2t}.$$

Puesto que

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{5} + t\right) e^{-2t} = 0$$

para t suficientemente grande el comportamiento del sistema es casi identico a

$$-\frac{1}{5} \cos 4t - \frac{3}{20} \operatorname{sen} 4t.$$

Por lo tanto, una aproximación para la amplitud de la respuesta es

$$A = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{400}} = \sqrt{\frac{25}{400}} = \frac{5}{20}.$$

Asignación de puntaje:

- Determinar EDO a resolver: $0,5$ puntos.
- Determinar condición inicial: $0,5$ puntos.
- Solución del problema homogéneo: 1 punto.
- Solución particular a intentar: 1 punto.
- Encontrar solución particular: 1,5 puntos.
- Resolver PVI: $0,5$ puntos.
- Determinar término dominante: $0,5$ puntos.
- Determinar aproximación para amplitud: $0,5$ puntos.

4. Encuentre la solución de

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 18y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 9y$$

sujeto a la condición inicial

$$x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0.$$

Una solución:

El PVI se puede reescribir como

$$X' = AX \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$\det A - \lambda I = (3-\lambda)(-9-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2$$

de modo que el único valor propio es $\lambda = -3$. Puesto que

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el espacio propio es generado por

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denotamos este vector como K y obtenemos una solución

$$Ke^{-3t}.$$

Puesto que requerimos construir una segunda solución LI buscamos un vector P tal que $(A+3I)P = K$. Calculamos

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cumple lo pedido. Entonces, una segunda solución LI de la primera es

$$(tK + P)\, e^{-3t}$$

y entonces la solución general es

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-3t}.$$

La solución del PVI debe cumplir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$. Luego, la solución es

$$X(t) = 2\left(t\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}\right)e^{-3t}.$$

Asignación de puntaje:

- Identificar PVI como sistema: $0,5$ puntos.
- Encontrar valor propio: 1 punto.
- Encontrar vector propio: 1 punto.
- Determinar vector propio generalizado: 1 punto.
- Solución general: $1,5$ puntos.
- Solución del PVI: 1 punto.