PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

MAT1640 – ECUACIONES DIFERENCIALES
Interrogación 2

1. (a) ¿Existe una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

con coeficientes continuos, definida en el intervalo $(-1, 1)$ que tenga a $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^3$ como dos soluciones linealemente independientes en ese intervalo?

(b) Resuelva el PVI

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 17y = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución.

(a) Calculamos el wronskiano asociado a esas soluciones

$$W(x^2.x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4.$$

Notamos que las funciones x^2 y x^3 son linealement independientes pero su wronskiano se anula en $0 \in (-1, 1)$, por lo tanto no pueden ser solución de una tal ecuación, ya que si lofueran su wronskiano no podría anularse dentro del intervalo en que la son solución.

Distribucipon de puntaje.
- Calcular el wronskiano, **1.5 puntos**.
- Concluir que no pueden ser solución de una edo como indicada, **1.5 puntos**.

(b) Se trata de una ecuación diferencial homogénea cuya ecuación característica asociada es $r^2 - 8r + 17 = 0$ que tiene dos soluciones complejas conjugadas $4 \pm i$. Luego la solucioon general de la ED es

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x} \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$ implican que $c_1 = 1$ y $c_2 = -3$.
Finalmente la solución de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x} \left(\cos x - 3 \sin x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje.
- Determinar la ecuación característica y sus soluciones, **0.5 punto**.
- Determinarla solución general de la ecuación diferencial, **1 punto**.
- Calcular las constantes con las condiciones iniciales, **1 punto**.
- Escribir la solución general, **0.5 punto**.

2. La dinámica de una población $P(t)$ de aves se describe por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP(\ell - P)(P - m)$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, $\ell > 0$ es *la población de equilibrio* que el medio ambiente puede sostener y $m \in (0, \ell)$ es *el umbral de superviencia*. Calcule el límite $\lim_{t\to\infty} P(t)$ si la población inicial $P_0 = P(0)$ satisface

(a) $P_0 > \ell$,
(b) $P_0 \in (m, \ell)$,
(c) $P_0 \in (0, m)$.

Justifique sus respuestas.

Solución. Sea

$$f(P) := kP(\ell - P)(P - m), \quad P \in \mathbb{R}.$$

Los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP(\ell - P)(P - m),$$

corresponden a las soluciones de la ecuación $f(P) = 0$, es decir $P = 0, m, \ell$. Tenemos $f(P) > 0$ si $P \in (-\infty, 0)$, $f(P) < 0$ si $P \in (0, m)$, $f(P) > 0$ si $P \in (m, \ell)$, $f(P) < 0$ si $P \in (\ell, \infty)$. Por lo tanto, $P = 0, \ell$ son puntos de equilibrio estables y $P = m$ es punto de equilibrio inestable. Como resultado, obtenemos

- $\lim_{t\to\infty} P(t) = \ell$ si $P_0 > \ell$;
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = \ell$ si $P_0 \in (m, \ell)$;
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$ si $P_0 \in (0, m)$.

Distribución de puntaje.

- Determinar las puntos de equilibrios, **1.5 puntos**, (0.5 punto cada uno).
- Clasificarlos, **1.5 puntos**, (0.5 cada uno).
- Determinar los límites en cada caso, **3 puntos**, (1 cada uno).

Solución alternativa del ejercicio 3 (sin utilizar equilibrios): Sea $P(t, P_0)$ la solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP(\ell - P)(P - m), \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

Si $P_0 \notin \{0, l, m\}$, definamos la función

$$G_{P_0}(P) := \int_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}s}{f(s)},$$

donde f es la función f definida por $f(s) = ks(\ell - s)(s - m)$. Integrando, obtenemos

$$G_{P_0}(P) = t,$$

es decir la solución $P(t, P_0)$ es la función inversa a G_{P_0}. Luego

- Si $P_0 > \ell$, la función G_{P_0} es definida en el intervalo (ℓ, ∞), es decreciente y tenemos $\lim\limits_{P \downarrow \ell} G_{P_0}(P) = \infty$. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = \ell$ si $P_0 > \ell$.
- Si $P_0 \in (m, \ell)$, la función G_{P_0} es definida en el intervalo (m, ℓ), es creciente y tenemos $\lim\limits_{P \uparrow \ell} G_{P_0}(P) = \infty$. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = \ell$ si $P_0 \in (m, \ell)$.
- Si $P_0 \in (0, m)$, la función G_{P_0} es definida en el intervalo $(0, m)$, es decreciente y tenemos $\lim\limits_{P \downarrow 0} G_{P_0}(P) = \infty$. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = 0$ si $P_0 \in (0, m)$.

3. (a) Para $x > 0$, considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^4\ \mathrm{e}^{2x}.$$

Encuentre la solución general de la ecuación sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

(b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t \arctan t.$$

Solución.

(a) Usando la fórmula de Abel para el wronskiano, tenemos

$$y_2(x) = x\int \frac{\mathrm{e}^{\int \frac{x+2}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x = x\int \frac{\mathrm{e}^{x+2\ln x}}{x^2}\mathrm{d}x = x\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x.$$

Entonces la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_0(x) = c_1x + c_2x\mathrm{e}^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular de la ecuación diferencial de la forma

$$y_p(x) = \alpha_1(x)x + \alpha_2(x)x\mathrm{e}^x,$$

y obtenemos que $\alpha_1(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(1-2x)$ y $\alpha_2(x) = x\mathrm{e}^x$. Luego

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}(2x-3),$$

y finalmente la solución general de la ecuación es

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}(2x-3), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje.
- Determinar $y_2(x)$, **1 punto**.
- Determinar la solución general de la ecuación homogénea asociada, **0.5 punto**.
- Determinar una solución particular, **1 punto**.
- Escribir la solución general de la ecuación, **0.5 punto**.

Observación. Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^4\ \mathrm{e}^{2x},$$

para $x > 0$ es también equivalente a resolver la ecuación diferencial

$$v'' - v' = x\mathrm{e}^{2x} \quad \text{para } x > 0 \text{ con } y = xv.$$

(b) La ecuación homogénea asociada es $y'' - 2y' + y = 0$ y su ecuación característica asociada $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ tiene solución doble $r = 1$. Así la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$y_0(t) = (\alpha t + \beta)\mathrm{e}^t.$$

Por método de variación de parámetros, propongamos una solución particular

$$y_p(t) = \alpha(t)t\mathrm{e}^t + \beta(t)\mathrm{e}^t,$$

donde $\alpha(t) = \int \frac{W_1}{W}$ y $\beta(t) = \int \frac{W_2}{W}$.

$$W = \begin{vmatrix} t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \\ (1+t)\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{2t}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \arctan t & \mathrm{e}^t \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{2t}\arctan t,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} t\mathrm{e}^t & 0 \\ (1+t)\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \arctan t. \end{vmatrix} = t\mathrm{e}^{2t}\arctan t$$

Entonces por integración por partes

$$\alpha(t) = \int \arctan t \ \mathrm{d}t = t\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

$$\beta(t) = -\int t\arctan t \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t^2\arctan t + \frac{1}{2}(t - \arctan t)$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial considerada es

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left((t^2-1)\arctan t - t\ln(1+t^2)\right) + (\alpha t + \beta)\ \mathrm{e}^t \quad \alpha.\beta \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje.

- Determinar la solución de la ecuación homogénea asociada, **0.5 punto**.
- Determinar una solución particular caluculando las funciones α, β, **2 puntos**.
- Escribir la solución general de la ecuación diferencial, **0.5 punto**.

4. Considere un sistema masa-resorte sin amortiguamiento con masa de 1 kg, constante de resorte 1 N.m^{-1}, que está sujeto a una fuerza externa de $2\cos t$ N.

   (a) Determine la ecuación diferencial asociada al movimiento de la masa.

   (b) Resuelva la ecuación y determine la función de desplazamiento $x(t)$ si la masa parte del reposo con velocidad cero.

   (c) Represente gráficamente la función obtenida en (b) ¿Se produce resonancia?

Solución.

(a) Consideramos un sistema de coordinación donde la dirección positiva de es hacia abajo y la dirección negativa es hacia arriba. En este sistema la ecuación del movimiento será

$$(E) \quad x'' + x = 2\cos t.$$

La masa parte con velocidad inicial cero, desde la posición de reposo que correponde a $x = 0$.

(b) La ecuación del movimiento es no homogénea con coeficientes constantes. La homogénea asociada es

$$(E_0) \quad x'' + x = 0,$$

que tiene solución $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. Buscamos una solución particular de la ecuación (E) por algún método de variación de parámetros o de coeficientes indeterminados para obtener

$$x_p(t) = t\ \sin t,$$

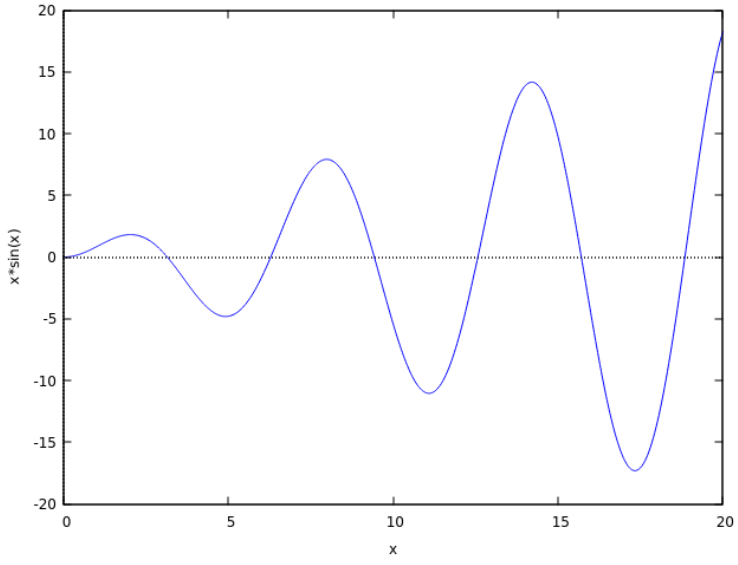
y luedo la solución general de la ecuación del movimiento (E) es

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + t\ \sin t,$$

y como $x(0) = x'(0) = 0$ y $x'(t) = \sin t + t\ \cos t - c_1\sin t + c_2\cos t$ entonces $c_1 = c_2 = 0$ y por lo tanto

$$x(t) = t\ \sin t.$$

(c) La frecuencia de la fuerza externa coincide con la del sistema libre. Entonces hay resonancia.



Distribucipon de puntaje.

- Determinar la ecuación del movimiento, **1 punto**.
- Resolver la ecuación homogénea, **1 puntos**.
- Encontrar una solución particular por algun método (variación de parámetros o coeficientes indeterminados), **1 puntos**.
- Determinar la solución general, **1 punto** .
- Graficar la solución general, **1 punto**.
- Decidir y justificar que hay resonancia, **1 punto**.