Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

I2 – MAT 1640
1 de octubre, 2013

Problema 1.
(a) Indique los valores de a y b para los cuales el Problema de Valor Inicial

$$t\,\frac{dy}{dt} \;=\; 2y; \qquad y(a) \;=\; b$$

(i) Posee solución única
(ii) No posee soluciones
(iii) Posee infinitas soluciones

Respuesta : La ecuación es separable. Su solución general viene dada por $y = Ct^2$ y tiene además la solución singular $y \equiv 0$.

Por otro lado, la ecuación puede escribirse como $y' = \dfrac{2y}{t} = f(t,y)$.

Por el Teorema de Existencia y Unicidad, hay solución única que pasa por (a,b) cuando $f(a,b) = 2b/a$ y $f_y(a,b) = 2/a$ son ambas continuas
Por lo tanto,
(i) Hay solución única si $\mathbf{a \neq 0}$ y para todo b
Cuando $a =$ no rige el T.E.U. Observamos que si $a = 0$ pero $b \neq 0$ no puede satisfacerse la ecuación, de modo que
(ii) No hay soluciones cuando $\mathbf{a = 0}$ y $\mathbf{b \neq 0}$.
Por último observamos que si $a = b = 0$ entonces, para cualquier valor de C la curva $y = Ct^2$ pasa por el punto y así,
(iii) Hay infinitas soluciones cuando $\mathbf{a = b = 0}$.

(b) Encuentre los valores de equilibrio de la ecuación autónoma $y'(x) = y\,(1 - y^2)$ y clasifíquelos (nodos, fuentes o sumideros).
Indique el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} y_0(x)$ siendo $y_0(x)$ la única solución del Problema de Valor Inicial
$y'(x) = y(1-y^2)\,; \quad y(0) \;=\; 1/2.$

Respuesta : Los valores de equilibrio son las soluciones de $f(y) = y(1-y^2) = 0$. Esto es, $y = -1,\ 0,\ 1$.

Notamos también que $f(y)$ es positiva cuando $y < -1$ y también cuando $0 < y < 1$, mientras que $f(y)$ es negativa cuando $y > 1$ y también cuando $-1 < y < 0$.
Por lo tanto,
$y = -1$ e $y = 1$ son un sumideros, mientras que $y = 0$ es una fuente
Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} y_0(x) \;=\; 1$ ya que la curva parte con pendiente positiva y así se acerca asintóticamente al siguiente valor de equilibrio.

Problema 2.
(a) Sean $y_1(t) = t^2\,|t|;\ y_2(t) = t^3$. Demuestre que estas funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ sin embargo su Wronskiano es idénticamente cero.

Respuesta : Son linealmente independientes pues, si hay constantes a y b tales que la función

$$f(t) \;=\; at^2|t| \,+\, bt^3 \;\equiv\; 0 \qquad \text{para todo}\, x,$$

evaluando en $t = 1$ obtenemos $0 = a + b$ mientras que cuando $t = -1$ obtenemos $0 = a - b$ lo cual implica que $a = b = 0$ mostrando así la independencia lineal de las funciones.

Por otra parte, para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos que $y_2'(t) = 3t^2$ mientras que, para $t \neq 0$, se tiene $y_1'(t) = 3t|t|$ y, por medio de la definición de derivada,

$$y_1'(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{y_1(h) \,-\, y_1(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{h^2|h|}{h} \;=\; 0$$

de modo que podemos escribir $y_1'(t) = 3t|t|$ para todo t real.
Así, el Wronskiano de $y_1(t),\ y_2(t)$ es

$$W(y_1,\, y_2) \;=\; \begin{vmatrix} t^2|t| & t^3 \\ 3t|t| & 3t^2 \end{vmatrix} \;=\; 3t^3(\, t|t| \,-\, t|t|\,) \;=\; 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Resuelva la ecuación $y'' \,+\, 2y' \,-\, 24y \;=\; (x+1)\,e^{4x}$.

Respuesta : La solución buscada es $Y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ siendo y_p alguna solución particular e y_h la solución general del caso homogéneo.

El polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es $p(r) = r^2 + 2r - 24$ el cual tiene raíces $r_1 = -6$, y $r_2 = 4$, de modo que $y_h(t) = C_1e^{-6x} + C_2e^{4x}$.

Por el método de los coeficientes indeterminados, buscamos Y_p de la forma $y_p(x) = (Ax^2 + Bx)e^{4x}$.
Entonces, derivando obtenemos

$$y_p'' \,+\, 2y_p' \,-\, 24y_p \;=\; (\,20Ax \,+\, (2A + 10B)\,)\; e^{4x} \;=\; (x+1)\,e^{4x}$$

de donde obtenemos $A = 1/20\,,\ \ B = 9/100,$ de modo que la solución buscada es

$$y(x) \;=\; C_1e^{-6x} \,+\, C_2e^{4x} \,+\, \frac{x}{100}\,(5x+9)e^{4x}$$

Problema 3. Resuelva la ecuación $xy'' - (x+2)y' + 2y = x^3e^x, \quad x > 0$, sabiendo que $y_1 = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada $(xy''-(x+2)y'+2y=0\,)$

Respuesta : Empezamos buscando una segunda solución, $y_2(x)$, del caso homogéneo.

Por el método de reducción de orden, y_2 es de la forma $y_2(x)$, $u(x)y_1(x) = u(x)e^x$. Derivando y reemplazando,

$$xy_2'' - (x+2)y_2' + 2y_2 = (x-2)u' + xu''$$

COmo esto debe ser igual a cero obtenemos una ecuación de primer orden para u' : $\dfrac{u''}{u'} = \dfrac{2}{x} - 1$, de donde $u' = x^2e^{-x}$.

Integrando por partes dos veces obtenemos finalmente que $u(x) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$

Como cualquier múltiplo de ella tambíen es solución, empleamos su opuesto obteniendo así que $y_2(x) = x^2 + 2x + 2$.

Claramente las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes de modo que ellas generan laa solucón general del caso homogéneo:

$$Y_H(x) = C_1e^x + C_2(x^2+2x+2)\,.$$

Ahora buscamos una solución particular, $y_p(x)$.
Por el método de variación de parámetros, para ellos necesitamos antes el wronskiano de y_1 e y_2.

$$W(y_1,\, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x^2+2x+2 \\ e^x & 2x+2 \end{vmatrix} = -x^2e^x.$$

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\,(x^2e^x)}{(-x^2e^x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\,(x^2e^x)}{(-x^2e^x)}\,dx$$

(recuérdese que para aplicar este método debemos dividir la ecuación por x)

$$= e^x\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - (x^2+2x+2)\right) = e^x\left(\frac{x^3}{3} - 2\right)$$

Por tanto, la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2(x^2+2x+2) + e^x\left(\frac{x^3}{3} - 2\right)$$

o, simplemente,

$$y = K_1e^x + K_2(x^2+2x+2) + e^x\,\frac{x^3}{3}$$

(si se combinan los dos términos del tipo cte$\cdot e^x$ y hacemos $K_1 = C_1 - 2$).

Alternativa: La ecuación original puede escribirse también en la forma

$$xy'' - (x+2)y' + 2y \;=\; x^3e^x \quad \Rightarrow \quad x(y''-y'\,) - 2(\,y'-y\,) \;=\; x^3e^x \quad \Rightarrow \quad xu' - 2u \;=\; x^3e^x$$

con la susutitución $u = y' - y$.

se trata de una ecuación lineal de orden uno para $u(x)$ cuya solución es $u = (x^2 + C_1)e^x$.

Se resuelve entonces $y' - y = (x^2 + C_1)e^x$ y se llega a la misma respuesta.
(Con este método ni siquiera necesita usarse la solución y_1 que se entrega).

Problema 4. Una masa de 2 Kilos estira 0,1 m un resorte. Al principio la masa se libera desde un punto que está 0,5 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 8 m/s. Ignorando el roce (fricción) del medio,

(a) Encuentre la ecuación del movimiento

(b) Encuentre el alejamiento máximo que experimenta la masa respecto de su posición de equilibrio

(Las unidades vienen todas en el sistema MKS. Por simplicidad aproxime $g \approx 10\, m/s^2$)

Respuesta : No habiendo roce ni fuerza exterior, la ecuación es de la forma $mx''(t) + kx(t) = 0$.

Según los datos entregados, $m = 2$.

Para hallar la constante k del resorte apelamos a la Ley de Hooke: Como una fuerza de $mg = 20$ N produce una elongación de 0,1 metros:

$$20 = k \cdot 0,1 \quad \rightarrow \quad k = 200$$

de modo que la ecuación es $2x''(t) + 200x(t) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x''(t) + 100x(t) = 0.$

Como las raíces de la ecuuación característica son $\pm 10i$ la solución general de tal ecuación es

$$x(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \operatorname{sen}(10t).$$

Las condiciones inciales son $x(0) = -\frac{1}{2}; \quad x'(0) = 8.$

Sustituyendo obtenemos $C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{8}{10}$

Así,

(a) La ecuación del movimiento es $x(t) = -\frac{5}{10}\cos(10t) + \frac{8}{10}\operatorname{sen}(10t).$

(b) Para la parte siguiente conviene escribir $x(t)$ en la forma $A\operatorname{sen}(10t + \varphi)$. En tal caso A mide la amplitud de la oscilación.

Tenemos que

$$x(t) = \frac{\sqrt{5^2+8^2}}{10}\left(\frac{8}{\sqrt{5^2+8^2}}\operatorname{sen}(10t) - \frac{5}{\sqrt{5^2+8^2}}\cos(10t)\right) = \frac{\sqrt{89}}{10}\operatorname{sen}(10t-\varphi)$$

siendo φ el único ángulo del primer cuadrante tal que $\cos(\varphi) = \frac{8}{\sqrt{89}}$ y $\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{89}}$.

De este modo, el alejamiento máximo es de $\frac{\sqrt{89}}{10} \approx 0,94$ metros.

Alternativa: La parte **(b)** puede también resolverse notando que el alejamiento máximo es $x(t_0)$ siendo t_0 el instante en que $x(t)$ alcanza su máximo. Esto es, el instante tal que $x'(t_0) = 0$.

Como $x(t) = -\frac{5}{10}\cos(10t) + \frac{8}{10}\operatorname{sen}(10t)$ la condición de máximo es $\tan(10t_0) = -\frac{8}{5}$ con lo cual obtenemos

$$\operatorname{sen}(10t_0) = \frac{8}{\sqrt{89}}; \quad \cos(10t_0) = -\frac{5}{\sqrt{89}} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t_0) = \frac{89}{10\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{89}}{10}.$$