Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2014

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Interrogación 2

1. *a*) Encuentre la solución general de la ecuación,

$$tx'' + (-2t+1)x' + (t-1)x = 0,$$

sabiendo que $x_1(t) = e^t$ es una solución.

b) Encuentre la solución del problema

$$tx'' + (-2t+1)x' + (t-1)x = \frac{e^t}{t}, \quad x(1) = 0, \quad x'(1) = 0.$$

Solución

Parte a Para $t \neq 0$ buscamos una solución de la ecuación

$$x'' + (-2 + \frac{1}{t})' + (1 - \frac{1}{t})x = 0 \tag{1}$$

Intentamos con una solución de la forma

$$x_2(t) = c(t)e^t$$

Reemplazando en la ecuación (1) obtenemos

$$c''(t)e^t + 2c'(t)e^t + c(t)e^t + \left(-2 + \frac{1}{t}\right)(c'(t)e^t + c(t)e^t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)c(t)e^t = 0$$

Usando que e^t es solución de (1) tenemos que

$$0 = c''(t)e^t + 2c'(t)e^t + \left(-2 + \frac{1}{t}\right)c'(t)e^t \quad \Longrightarrow c''(t) + \frac{c'(t)}{t} = 0$$

Que es una ecuacion lineal (o de variables separables) que tiene por solución (por ejemplo) a

$$c(t) = \log|t|, \quad t \neq 0.$$

Por lo que otra solución de (1) es $x_2(t) = e^t \log|t|$. Ahora calculamos el Wronskiano para comprobar la independencia lineal de ambas soluciones

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^t \log|t| \\ e^t & e^t \log|t| + \frac{e^t}{t} \end{vmatrix} = \frac{e^{2t}}{t}$$

Que es diferente de cero para todo $t \neq 0$, lo que implica que x_1 y x_2 son linealmente independientes en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Así la solución general de (1) es de la forma

$$\alpha e^t + \beta e^t \log|t|$$

con α y β en $\mathbb{R}$.

Parte b Para encontrar la solución de este problema de valores iniciales necesitamos una solucion particular de

$$x'' + (-2 + \frac{1}{t})x' + (1 - \frac{1}{t})x = \frac{e^t}{t^2} \tag{2}$$

Usamos el método de variación de parámetros para buscar una solución de la forma

$$c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t),$$

que nos dará que

$$c_1'(t) = -\frac{e^t}{t^2}\frac{te^t \log|t|}{e^{2t}} = -\frac{\log|t|}{t}$$

y con esto podemos tomar

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}\log^2|t|$$

De manera análoga

$$c_2'(t) = -\frac{e^t}{t^2}\frac{t\log|t|}{e^{2t}} = \frac{1}{t}$$

y

$$c_2(t) = \log|t|$$

Por lo que una solución particular de (2) es $x_p(t) = e^t \log^2|t|/2$, y por tanto la solucion general de (2) es $\alpha e^t + \beta e^t \log|t| + e^t \log^2|t|/2$. Usando las condiciones iniciales obtenemos que $\alpha = \beta = 0$. Así la solución del problema es $e^t \log^2|t|/2$.

2. Una masa unitaria se encuentra sobre una mesa sin roce sujeta a un resorte de constante $k = 4$. En el instante $t = 0$, la masa se encuentra en equilibrio y comienza a actuar una fuerza externa $F(t) = 2 + t + \text{sen}(2t)$.

   a) Determine el desplazamiento $x = x(t)$ de la posición de equilibrio en función del tiempo.

   b) Describa cualitativamente el comportamiento de la masa a partir del instante $t = 0$.

Solución

Parte a Usando la ecuación de Newton obtenemos la ecuación de movimiento del sistema, dada por

$$x''(t) + 4x(t) = 2 + t + \text{sen}(2t) \tag{3}$$

Primero resolvemos la ecuación homogenea, y para ello buscamos las raices de $\lambda^2 + 4 = 0$, que son $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Sabemos entonces que un par de soluciones linealmente independientes de la ecuacion homogenea es

$$x_1(t) = \text{sen}\, 2t, \qquad x_2(t) = \cos 2t$$

Ahora necesitamos una solución particular de la ecuación no homogenea (3). Primero buscamos una solución particular de $x''(t) + 4x(t) = 2 + t$, que por el método de coeficientes indeterminados debe tener la forma $ax + b$. Calculando obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 1/4$.

Para la solución de $x''(t) + 4x(t) = \text{sen}\, 2t$ notamos que si $D := d/dx$, entonces la ecuación a resolver es $(D^2 + 4) = \text{sen}\, 2t$. Además tenemos que

$$(D^2 + 4)\,\text{sen}\, 2t = 0$$

Por lo que debemos buscar soluciones del tipo $c\,t\,\text{sen}\, 2t + d\,t\cos 2t$. Reemplazando en $x''(t) + 4x(t) = \text{sen}\, 2t$, vemos que $c = 0$ y $b = -1/4$

Juntando lo anterior tenemos la solución particular de (3), $x_p(t) = 1/2 + 1/4x - 1/4t\cos 2t$. Por lo que la solución general de la ecuación (3) es

$$x_g(t) = \alpha\,\text{sen}\, 2t + \beta\cos 2t + \frac{2+t}{4} - \frac{t}{4}\cos 2t$$

La condición de que en el instante $t = 0$ la masa está en equilibrio, se puede interpretar como que $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Combinando estas condiciones junto con la solución general, tendremos que el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio será

$$x(t) = \frac{1 - \cos 2t}{2} + t\frac{1 - \cos 2t}{4} = \frac{(2 + t)}{4}(1 - \cos 2t)$$

Parte b Para describir cualitativamente el movimiento de la masa primero notamos que el término $(2 + t)/4$ crece de manera no acotada a medida que pasa el tiempo, por lo que la masa alcanza puntos más y más distantes desde el origen, aunque el término periódico $1 - \cos 2t$ la hace pasar por el origen a intervalos de regulares de tiempo (esto implica en particular que su rapidez es cada vez mayor). Sin embargo, dado que $(1 - \cos 2t) \geq 0$, la masa sólo toca su posición de equilibrio, sin cruzarla, produciendose una especie de "rebote" de la masa en ese punto, un rebote tal que el bote es cada vez más y más alto.

3. *a*) Determine α de modo que $y = x^\alpha$ sea solución de

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = 0\,.$$

b) Determine la solución general de la ecuación

$$x^2y''' - 6xy'' + 10y' = 0 \tag{4}$$

justificando la independencia lineal de la base encontrada.

Solución

Parte a Reemplazando $y = x^\alpha$ en la primera ecuación, obtenemos

$$\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - 6\alpha x^\alpha + 10^\alpha = 0$$

Lo que para $x \neq 0$ implica $\alpha(\alpha - 1) - 6\alpha + 10 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$.

Parte b Para buscar las soluciones de (4) hacemos $u = y'$, obteniendo la misma ecuación que en la parte a). Sabemos que dos soluciones de esa ecuación son $u_1(x) = x^2$, $u_2(x) = x^5$, pero además notamos que $u \equiv 0$ es tambien solución. Así, consideramos la funciones

$$y_1 = x^3, \quad y_2 = x^6, \quad y_3 = 1$$

Todas ellas son solución de la ecuación (4). Veamos que son linealmente independientes calculando su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^6 & 1 \\ 3x^2 & 6x^5 & 0 \\ 6x & 30x^4 & 0 \end{vmatrix} = 56x^6 \neq 0, \quad x \neq 0$$

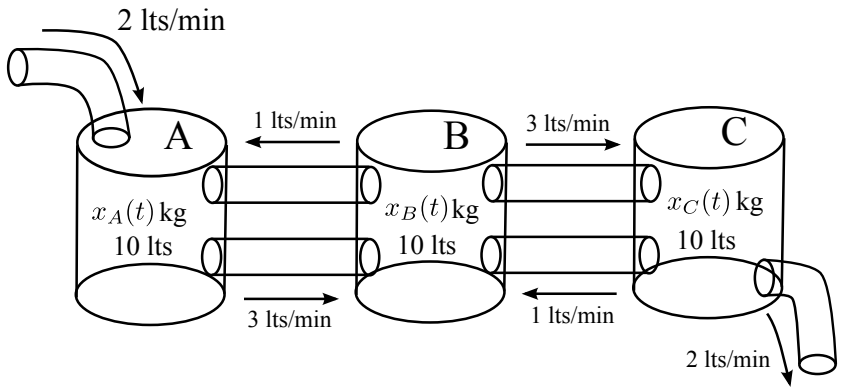
Finalmente como (4) es una ecuación lineal de orden 3, sus soluciones forman un espacio vectorial de dimension 3, por lo que la solución general (en cualquier intervalo que no contenga al 0) es

$$a + bx^3 + cx^6, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

4. Tres tanques A, B, C con salmuera se encuentran conectados tal como se indica en la figura. En el instante t el tanque A contiene $x_A(t)$ Kg de sal en 10 litros de solución, el tanque B contiene $x_B(t)$ Kg de sal en 10 litros de solución y el tanque C contiene $x_C(t)$ Kg de sal en 10 litros de solución. La salmuera se mantiene uniforme en cada tanque por agitación. Al tanque A se le agrega agua fresca, del tanque C se extrae salmuera, y de un tanque a otro se bombea salmuera con las velocidades indicadas en la figura.

a) Escriba un sistema de ecuaciones diferenciales para las cantidades (x_A, x_B, x_C) y resuélvalo sabiendo que en un comienzo el tanque A no tenía sal, el tanque B tenía 3.5 Kg de sal y el tanque C tenía 3 Kg de sal.

b) ¿Qué ocurre con la cantidad de sal en el estanque A a medida que transcurre el tiempo?



(a) Esquema de las conexiones y flujos entre los tres tanques A, B, C.

Solución

Parte a Para modelar este sistema, primero notamos que en cada momento la sal que entra al estanque A proviene solo del estanque B y es

$$\frac{x_B \,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{lts}}\, 1\, \frac{\mathrm{lts}}{\mathrm{min}} = \frac{x_B}{10}\frac{\mathrm{lts}}{\mathrm{min}}$$

Tambien podemos ver que la sal que sale del estanque A es

$$\frac{x_A \,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{lts}}\, 3\, \frac{\mathrm{lts}}{\mathrm{min}} = \frac{3x_A}{10}\frac{\mathrm{lts}}{\mathrm{min}}$$

Por lo que

$$\frac{dx_A(t)}{dt} = \left(\frac{x_B(t)}{10} - \frac{3x_A(t)}{10}\right)\frac{\mathrm{lts}}{\mathrm{min}}$$

Rasonando de manera análoga con los otros estanques, obtenemos el sistema

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx_A(t)}{dt} & = & \left(\frac{x_B(t)}{10} - \frac{3x_A(t)}{10}\right) \\ \frac{dx_B(t)}{dt} & = & \left(\frac{3x_A(t)}{10} - \frac{4x_B(t)}{10} + \frac{x_C(t)}{10}\right) \\ \frac{dx_C(t)}{dt} & = & \left(\frac{3x_B(t)}{10} - \frac{3x_C(t)}{10}\right) \end{array}$$

Entonces si

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

debemos resolver el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = (0, \frac{7}{2}, 3)^T$$

Primero buscamos los valores propios de A, calculando

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

Esto nos entrega los valores

$$\lambda_1 = \frac{-1}{10}, \quad \lambda_2 = \frac{-3}{10}, \quad \lambda_3 = \frac{-6}{10}$$

que tienen por vectores propios (por ejemplo) a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Al ser los valores propios de A reales y distintos, sabemos que es diagonalizable y por tanto

$$A = UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 15 & 0 & -5 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, sabemos que la solucion del problema esta dada por

$$e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t/10} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t/10} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6t/10} \end{pmatrix} \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 15 & 0 & -5 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (e^{\frac{-t}{10}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-3t}{10}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-6t}{10}}, 2e^{\frac{-t}{10}} + \frac{3}{2}e^{\frac{-6t}{10}}, 3e^{\frac{-t}{10}} + \frac{3}{2}e^{\frac{-3t}{10}} - \frac{3}{2}e^{\frac{-6t}{10}})$$

Parte b Del resultado obtenido en la parte a) vemos que, dado que empezó con nada de sal, al principio irá aumentando la cantidad de esta, hasta alcanzar un máximo. Luego la la cantidad de sal del estanque disminuye paulatinamente, ya que los coeficientes que aparecen en los exponentes de las funciones exponenciales son negativos. Así, transcurrido un tiempo, practicamente no tendrá nada de sal.