Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT 1640 Ecuaciones Diferenciales: Interrogación 2
el 5 de octubre de 2015
SOLUCIONES

Problema 1. (i) Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cos y \tag{1}$$

y clasifíquelos como estables, inestables o semiestables (o, de manera equivalente, como sumideros, fuentes o nodos).
(ii) Sea $y = y(t; a)$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \cos y, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Encuentre todos $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} y(t; a) = 0. \tag{2}$$

Solución: (i) Los puntos de equilibrio de (1) son las soluciones de la ecuación

$$y^2 \cos y = 0.$$

Estas soluciones son $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $y = 0$. Evaluemos la derivada $f'(y) = -y^2 \operatorname{sen} y + 2y \cos y$ de la función $f(y) := y^2 \cos y$ en estos puntos. Tenemos

$$f'(\pi/2 + k\pi) = (\pi/2 + k\pi)^2(-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, si k es par, $f'(\pi/2 + k\pi) < 0$ y $\pi/2 + k\pi$ es estable (sumidero). Si k es impar, $f'(\pi/2 + k\pi) > 0$ y $\pi/2 + k\pi$ es inestable (fuente). Luego, $f'(0) = 0$ y necesitamos más información. Tenemos $\cos y > 0$ si $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ y por lo tanto el equilibrio $y = 0$ es semiestable (nodo).
(ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ fijo tenemos dos posibilidades alternativas:

- $a = (2m + 1)\pi + \pi/2$ con algún $m \in \mathbb{Z}$;
- a pertenece al intervalo abierto $((2m - 1)\pi + \pi/2, (2m + 1)\pi + \pi/2)$ con algún $m \in \mathbb{Z}$.

Si $a = (2m + 1)\pi + \pi/2$, $m \in \mathbb{Z}$, las soluciones $y(t; a)$ son constantes, $\lim_{t\to\infty} y(t; a) = (2m + 1)\pi + \pi/2$ y (2) no se cumple. Luego, si $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, el intervalo $((2m - 1)\pi + \pi/2, (2m + 1)\pi + \pi/2)$ contiene a sólo un punto de equilibrio, $2m\pi + \pi/2$, que es estable según la parte (i). Por lo tanto, si $a \in ((2m - 1)\pi + \pi/2, (2m + 1)\pi + \pi/2)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, tenemos $\lim_{t\to\infty} y(t; a) = 2m\pi + \pi/2$ y (2) no se cumple.
Queda analizar las soluciones $y(t; a)$ con $a \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. El intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ contiene a dos puntos de equilibrio: $y = \pi/2$ que es estable, e $y = 0$ que es semistable, la función f siendo positiva cerca de este punto. Por lo tanto, si $a \in (-\pi/2, 0]$, tenemos $\lim_{t\to\infty} y(t; a) = 0$ y (2) se cumple. Si $a \in (0, 3\pi/2)$, tenemos $\lim_{t\to\infty} y(t; a) = \pi/2$ y (2) no

se cumple. Por ende, (2) se cumple si y sólo si $a \in (-\pi/2, 0]$.

Problema 2. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0. \tag{3}$$

(i) Verifique que la función $y_1(x) := \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución de (3). Utilizando la fórmula de Abel o el método de reducción de orden, encuentre solución y_2 de (3) que es linealmente independiente con y_1.
(ii) Encuentre la solución general de (3).
(iii) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0, \\ y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Solución: (i) La función y_1 es dos veces continuamente diferenciable en $(0, \infty)$ y

$$\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)' = -\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}, \quad \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)'' = 2\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} - 2\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

Por lo tanto, $y_1''(x) + \frac{2}{x}y_1'(x) + y_1(x) = 0$, $x > 0$, es decir y_1 es solución de (3). Luego, la fórmula de Abel-Liouville implica que una solución y_2 de (3), linealmente independiente con y_1, debe satisfacer

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = cx^{-2} \tag{5}$$

con una constante $c \neq 0$. Elegiendo, por ejemplo, $c = 1$, notando que (5) es equación lineal de primer orden con respecto a y_2 y resolviendo esta ecuación, encontramos

$$y_2(x) = y_1(x) \int x^{-2} y_1(x)^{-2} dx = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{\cos x}{x},$$

donde hemos elegido la constante de integración igual a cero. La inspección directa muestra que y_2 es dos veces continuamente diferenciable en $(0, \infty)$ y es solución de (3).
Observación: Este método no exige verificación adicional que y_2 es linealmente independiente con y_1; nuestra elección $c \neq 0$ ya garantiza eso. Es posible también buscar y_2 en la forma $y_2 = y_1 u$ donde la función u satisface $y_1 u'' + 2(y_1' + y_1/x)u' = 0$; en este caso es necesario verificar que la solución obtenida y_2 es linealmente independiente con y_1.
(ii) Como $\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{x}, -\frac{\cos x}{x}\right\}$ es conjunto fundamental de soluciones de (3), la solución general de (3) es

$$y(x) = c_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} - c_2 \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0, \tag{6}$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias.
(iii) Utilizando (6) y satisfaciendo las condiciones iniciales en (4), encontramos $c_1 = 0$, $c_2 = \pi/2$. Por lo tanto, la solución del problema (4) es

$$y(x) = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0.$$

Problema 3: Consideremos la ecuación diferencial

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

donde a, b, c son constantes reales, $a \neq 0$.
(i) Encuentre criterios sobre los coeficientes a, b, c para que cada solución real y de (7) se anule en número infinito de puntos $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Encuentre criterios sobre los coeficientes a, b, c para que cada solución real y de (7) sea periódica, es decir existe $T > 0$ tal que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Solución: (i) Notemos que la ecuación característica asociada con (7) es

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{8}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces (8) tiene dos raices reales distintas r_1 y r_2 y la solución general real de (7) es

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales arbitrarias. Elegiendo, digamos, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, obtenemos solución real que no se anula en ningún $t \in \mathbb{R}$.
Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces (8) tiene una raíz real doble r y la solución general real de (7) es

$$y(t) = e^{rt}\left(c_1 + c_2 t\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales arbitrarias. Elegiendo de nuevo $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, obtenemos solución real que no se anula en ningún $t \in \mathbb{R}$.
Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces (8) tiene dos raices conjugadas distintas $r = \alpha + i\beta$, $\overline{r} = \alpha - i\beta$, con $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \neq 0$. Entonces, la solución general real de (7) es

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales arbitrarias. En este caso podemos escribir y en forma equivalente

$$y(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t - \delta), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

donde $c \geq 0$, $\delta \in [0, 2\pi)$, y $c_1 = c\cos\delta$, $c_2 = c\operatorname{sen}\delta$. La función $y(t)$ en (11) se anula en los puntos $t = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, cada solución real de (7) se anula en número infinito de puntos si y sólo si $b^2 - 4ac < 0$.
(ii) Si $b^2 - 4ac > 0$ al menos una de las dos raices r_1 y r_2 de (8), digamos r_1, es distinta de cero. Elejamos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ en (9). Entonces $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ si $r_1 < 0$ y $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ si $r_1 > 0$. Como, además, y no es identicamente nula, concluimos que y no es periódica.
Sea $b^2 - 4ac = 0$. Supongamos que $r \neq 0$. Si elegimos $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ en (10), obtenemos una función no identicamente nula que satisface $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ si $r < 0$ y $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ si $r > 0$; por lo tanto, y no es periódica. Si $r = 0$, podemos elegir $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ en (10); evidentemente, la solución obtenida $y(t) = t$ no es periódica como $y(t+T) = y(t)$ implica $T = 0$.
Sea $b^2 - 4ac < 0$. Si $\alpha \neq 0$ y $c > 0$, entonces la función y en (11) no es identicamente nula y satisface $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ si $\alpha < 0$ y $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ si $\alpha > 0$; por lo tanto y no es periódica.
Por otro lado, si $\alpha = 0$ que es equivalente a $b = 0$, la función y en (11) es periódica con período $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$.
Por lo tanto, cada solución real de (7) es periódica si y sólo si $b^2 - 4ac < 0$ y $b = 0$ que es

equivalente a $b = 0$ y $ac > 0$.

Problema 4: (i) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = \frac{1}{1+e^{2t}}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

(ii) Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = 1 + 2e^t - \operatorname{sen}(3t). \tag{13}$$

Solución: (i) Consideremos primero la ecuación homogénea

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0, \tag{14}$$

asociada a la ecuación no homogénea en (12). La ecuación característica $r^2 + 7r + 12 = 0$ tiene dos raices simples $r_1 = -3$, $r_2 = -4$. Por lo tanto, la solución general de (14) es

$$y_{gh}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} \tag{15}$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias. Para obtener una solución particular y_p de la ecuación en (12), vamos a aplicar el método de variación de parámetros. Buscamos y_p en la forma

$$y_p(t) = u_1(t)e^{-3t} + u_2(t)e^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

donde u_1 y u_2 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)e^{-4t} = 0, \\ -3u_1'(t)e^{-3t} - 4u_2'(t)e^{-4t} = \frac{1}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, encontramos

$$u_1'(t) = \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}, \quad u_2'(t) = -\frac{e^{4t}}{1+e^{2t}},$$

es decir

$$u_1(t) = e^t - \arctan(e^t), \quad u_2(t) = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2t}).$$

Reemplazando en (16), obtenemos

$$y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\arctan(e^t) + \frac{e^{-4t}}{2}\ln(1+e^{2t}). \tag{17}$$

Combinando (15) y (17), encontramos que la solución general de la ecuación en (12) es

$$y(t) = y_{gh}(t) + y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\arctan(e^t) + \frac{e^{-4t}}{2}\ln(1+e^{2t}) + c_1e^{-3t} + c_2e^{-4t} \tag{18}$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias. Satisfaciendo las condiciones iniciales en (12), obtenemos

$$c_1 = \frac{\pi}{4} - 1, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Reemplazando en (18), encontramos que la solución del problema (3) es

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\arctan(e^t) + \frac{e^{-4t}}{2}\ln(1+e^{2t}) + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)e^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Consideremos primero la ecuación homogénea

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = 0, \tag{19}$$

asociada a la ecuación no homogénea (13). La ecuación característica $r(r-1)^2 = 0$ tiene una raíz simple $r_1 = 0$ y una raíz doble $r_2 = 1$. Por lo tanto, la solución general de (19) es

$$y_{gh}(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t \tag{20}$$

donde c_1, c_2, c_3 son tres constantes arbitrarias. Para obtener una solución particular y_p de (13), vamos a aplicar el método de coeficientes indeterminados. Buscamos y_p en la forma

$$y_p(t) = At + Bt^2 e^t + C\cos(3t) + D\,\mathrm{sen}\,(3t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

donde A, B, C, D, son coeficientes por determinar. Reemplazando en (13) y utilizando la independencia lineal de las funciones 1, e^t, $\cos(3t)$, $\mathrm{sen}\,(3t)$ en $\mathbb{R}$, obtenemos

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -\frac{2}{75}, \quad D = -\frac{1}{50}.$$

Reemplazando en (21) y combinando el resultado con (20), encontramos que la solución general de (13) es

$$y(t) = y_p(t) + y_{gh}(t) = t + t^2 e^t - \frac{2}{75}\cos(3t) - \frac{1}{50}\,\mathrm{sen}\,(3t) + c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t,$$

donde c_1, c_2, c_3 son tres constantes arbitrarias.
Observación: La parte (ii) del Problema 4 también admite solución correcta por el método de variación de parámetros.