PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
8 de abril de 2013.

MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
Interrogaciόm N° 1

1. **(1.5pt)**

   (a) **(0.75pt)** Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

   $$y' + y\tan(x) = \cos^2(x),$$

   $$y(0) = 1.$$

   Solución: La ecuación es lineal de primer orden. Un factor integrante es $\mu(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Multiplicando la ecuación por este factor obtenemos

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{\cos(x)}\right) = \cos(x).$$

   Integrando obtenemos que

   $$y(x) = \cos(x)(\sin(x) + K),$$

   donde K es una constante de integración. Para encontrar la constante usamos la condición inicial:

   $$y(0) = K = 1.$$

   La solución que buscamos es $y(x) = \cos(x)(1 + \sin(x))$.

   (b) **(0.75pt)** Resuelva la siguiente ecuación y especifique para que valores de β tiene soluciones en todo tiempo

   $$\frac{dy}{dt} = 1 + e^{\beta y}.$$

   Sugerencia: efectúe una sustitución para resolver la ecuación.

   Solución: Es claro que si $\beta = 0$ la ecuación dice

   $$y'(t) = 2,$$

   cuya solución es $y(t) = 2t + C$, con C una constante de integración. Esta solución está definida para todo t. Por otro lado, si $\beta \neq 0$, la ecuación es de primer orden de variables separables. Para resolver integramos

   $$\int \frac{dy}{1 + e^{\beta t}} = t + K,$$

donde K es una constante de integración. Para integrar el lado izquierdo podemos observar que

$$\int \frac{dy}{1+e^{\beta y}} = \int \frac{e^{-\beta y}dy}{1+e^{-\beta y}} = \frac{-1}{\beta}\int \frac{(-\beta)e^{-\beta y}dy}{1+e^{-\beta y}} = \frac{-1}{\beta}\ln(1+e^{-\beta y}).$$

Obtenemos entonces que

$$\ln(1+e^{-\beta y}) = -\beta(t+K),$$

y de aquí

$$e^{-\beta y} = e^{-\beta(t+K)} - 1 = \lambda e^{-\beta t} - 1,$$

donde $\lambda = e^{-\beta K}$ es una constante que se puede encontrar conociendo un dato inicial. Observamos eso sí que $\lambda = e^{-\beta K} > 0$, pues la exponencial no entrega valores negativos ni cero. Con todo esto llegamos a que

$$y(t) = \frac{-1}{\beta}\ln(\lambda e^{-\beta t} - 1).$$

Recordando que $\lambda > 0$, vemos que esta solución siempre se indefine para $\lambda e^{-\beta t} - 1 = 0$, esto es, para

$$t^* = \frac{-1}{\beta}\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

y por lo tanto no está definida para todo t.

2. (a) **(0.75pt)** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + ay = r(t),$$

donde $a > 0$ es una constante real y $r(t)$ es una función continua tal que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$. Demuestre que si $y(t)$ es una solución de esta ecuación, entonces se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Solución: La ecuación es lineal de primer orden. Un factor integrante es e^{at}. Con esto obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{at}y(t)\right) = e^{at}r(t).$$

Integrando desde algún $t_0 > 0$ obtenemos

$$y(t) = \frac{e^{at_0}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{as}r(s)\,ds}{e^{at}}.$$

Observemos ahora que $e^{at_0}y(t_0)$ es constante, mientras que

$$\left|\int_{t_0}^{t} e^{as}r(s)\,ds\right| e^{at} \leq \int_{t_0}^{t} e^{as}\left|r(s)\right|\,ds.$$

Usando esto para $y(t)$ obtenemos que

$$|y(t)| \leq \frac{|e^{at_0}y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} e^{as}\,|r(s)|\,ds}{e^{at}}.$$

Como el numerador de la fracción de la derecha es creciente con t, pues su derivada no puede ser negativa, para el numerador solo hay dos posiblidades: o es acotado o se va a $+\infty$. Si es acotado, obviamente el lado derecho se va a cero con $t \to \infty$. Si el numerador se va a $+\infty$, podemos usar L'hopital para concluír que el lado derecho de la última desigualdad se va a cero con $t \to \infty$. En ambos casos $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

(b) **(0.75pt)** Sea $y(x)$ una solución del problema de valores iniciales

$$y' = x - y,$$

$$y(0) = 1.$$

Use el método de Euler con paso $h = \frac{1}{10}$ para encontrar un valor aproximado de $y(x)$ para $x = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$.

Solución: Sea $h =$,1. En el intervalo $[0, h]$ el método de Euler dice que

$$z(x) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

Como $y_0 = 1$, $t_0 = 0$ y $f(x, y) = x - y$, obtenemos

$$v(x) = 1 + (-1)x = 1 - x.$$

Con esto calculamos $y_1 = v(h) = 1 - h =$ 0,9. Entonces, en el intervalo $[h, 2h]$ obtenemos

$$v(x) = y_1 + f(x_1; y_1)(x - h).$$

Usando los valores que obtuvimos antes

$$v(x) = 0{,}9 - 0{,}8(x - 0{,}1).$$

De aquí $v(0{,}2) = 0{,}74$.

3. **(1.5pt)** Un cuerpo, cuya temperatura varia con el tiempo, esta rodeado por un medio que se mantiene a temperatura constante. Denotaremos pot $T(t)$ la temperatura del cuerpo en el instante t. La tempratura constante del medio que rodea al cuerpo la denotaremos por T_m.

   La *Ley del enfriamiento de Newton* dice: "La tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea."

   Se ha medido la temperatura del cuerpo en los tiempos $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ dando por resultado

   $$T(1) = 5, \quad T(2) = 3 \quad \text{y } T(3) = 2.$$

   Se sabe que $T(t) \geq T_m$ para todo tiempo t.

Se pide determinar la temperatura T_m del medio exterior.

Solución: Llamando $T(t)$ a la temperatura del cuerpo en el instante $t > 0$, la tasa de cambio de la temperatura es

$$\frac{dT}{dt}.$$

La diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medioambiente es $(T(t) - T_m)$. Queremos que estas cantidades sean proporcionales, esto es, queremos que

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T(t) - T_m).$$

Aquí λ es una constante por determinar. Para esto observemos que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}(T(t) - T_m)\right) = 0,$$

pues T_m es constante!! Entonces

$$e^{-\lambda t}(T(t) - T_m) = K,$$

donde K es alguna constante que no conocemos. De aquí tenemos que

$$T(t) = T_m + Ke^{\lambda t}.$$

Usando los datos que nos dan tenemos que

$$\begin{aligned} 5 &= T_m + Ke^{\lambda} \\ 3 &= T_m + Ke^{2\lambda} \\ 2 &= T_m + Ke^{3\lambda} \end{aligned}$$

Restando la segunda y tercera ecuaciones obtenemos

$$1 = Ke^{\lambda}(1 - e^{\lambda}).$$

Haciendo lo mismo con la primera y segunda ecuaciones obtenemos

$$2 = Ke^{2\lambda}(1 - e^{\lambda}).$$

Dividiendo estas ecuaciones obtenemos que $e^{\lambda} = 1/2$. Usando esto obtenemos que

$$5 = T_m + \frac{K}{2}$$

y que

$$3 = T_m + \frac{K}{4}.$$

La solución es $T_m = 1$.

4. (a) **(0.5pt)** Determine una funcion $f(y)$ de modo que el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

tenga solución única en algun intervalo que contiene a $t = 0$. Su respuesta será válida sólo si está debidamente justificada.

Solución: El teorema visto en clases para existencia y unicidad dice que si existe una constante tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces el problema de condiciones iniciales tiene solución única en algún intervalo que contiene a $t = 0$. Tomando por ejemplo $f(y) =$ vemos que esta condición se satisface con $L = 1$.

(b) **(1.0pt)** Determine una funcion $g(y)$ de modo que el problema de valores iniciales

$$y'(t) = g(y(t))$$
$$y(0) = 1$$

tenga al menos dos soluciones en todo intervalo pequeño que contiene a $t = 0$. Justifique su respuesta mostrando dos soluciones distintas para la funcion g que escoja.

Solución: Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$y' = 2\sqrt{y}$$
$$y(0) = 0.$$

Es fácil verificar que, dado $\beta > 0$, la función

$$v_\beta(t) = \begin{cases} 0 & t \geq \beta \\ (t-\beta)^2 & t \geq \beta \end{cases}$$

es solución del problema inicial para cualquier $\beta > 0$. Ahora queremos resolver el problema

$$y'(t) = g(y(t))$$
$$y(0) = 1.$$

Tomemos $g(x) = 2\sqrt{x-1}$, y definamos $x_\beta(t) = v_\beta(t) + 1$. Verificación directa da que

$$x'_\beta = g(x_\beta)$$
$$x_\beta(0) = 1.$$

Como esto vale para todo $\beta > 0$, tenemos infinitas soluciones del problema

$$y'(t) = g(y(t))$$
$$y(0) = 1.$$

TIEMPO: 2 horas.