Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 14

Transformada de Laplace

1. Muestre que la función $f(t) = \text{sen}\left(e^{t^2}\right)$ es de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, pero que su derivada no lo es.

2. Considere $u(t)$ la función escalón de Heaviside. La *función escalera unitaria* se define como sigue:
$$f(t) = n \quad \text{si} \quad n-1 \leq t < n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
   (a) Dibuje una gráfica de f para observar por qué su nombre es apropiado.
   (b) Muestre que
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$
   para toda $t \geq 0$.
   (c) Asuma que la transformada de Laplace de la serie infinita del inciso (b) puede tomarse por términos (si es posible).
   (d) Aplique la serie geométrica para obtener el resultado
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s\left(1-e^{-s}\right)}$$

3. Utilice la transformada de Laplace para resolver los siguientes PVI:
   (a) $x'' + 9x = 0, \quad x(0) = 3, x'(0) = 4.$
   (b) $x'' + x = \sin 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
   (c) $x' = 2x + y, \quad y' = 6x + 3y, \quad x(0) = 1, y(0) = -2.$
   (d) $x' = x + z, \quad y' = x + y, \quad z' = -2x - z, \quad x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0.$

4. (a) Deduzca la fórmula de $\mathscr{L}\{\cosh kt\}$ a partir de la fórmula $\mathscr{L}\{\sinh kt\}$.
   (b) Calcule $\mathscr{L}\{te^t\}$ usando la fórmula de la transformada de una integral.

5. Aplique la propiedad de traslación de Transformada de Laplace para encontrar la transformada o la transformada inversa de la siguientes funciones, según corresponda:

   (a) $f(t) = t^4 e^{\pi t}$

   (b) $f(t) = e^{-2t} \sin 3\pi t$

   (c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 4}$

   (d) $F(s) = \dfrac{3s + 5}{s^2 - 6s + 25}$

6. Utilice transformada de Laplace y fracciones parciales para resolver los siguientes PVI:

   (a) $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0; x(0) = 0, x'(0) = x''(0) = 1$

   (b) $x^{(4)} + 2x'' + x = e^{2t}; x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$

   (c) $x'' + 6x' + 18x = \cos 2t; x(0) = 1, x'(0) = -1$

7. Calcule la transformada inversa, de las siguientes funciones usando convolución:

   (a) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2 + 9)^2}$

   (b) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2 + 4)^2}$

   (c) $F(s) = \dfrac{s}{s^4 + 5s^2 + 4}$

8. Calcule $\mathscr{L}\{f\}$ o $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, usando la fórmula de derivada o integral de la transformada:

   (a) $f(t) = te^{2t} \cos 3t$

   (b) $f(t) = \dfrac{1}{t} \sin t$

   (c) $F(s) = \ln \dfrac{s - 2}{s + 2}$

   (d) $F(s) = \arctan \dfrac{3}{s + 2}$

9. (a) Usando transformada de Laplace, encuentre una solución no trivial tal que $x(0) = 0$ de

$$tx'' + (4t - 2)x' + (13t - 4)x = 0.$$

   (b) Usando convolución, obtenga la solución

$$x(t) = \frac{1}{3} \int_0^t f(t - \tau) e^{-2\tau} \sin 3\tau d\tau$$

   de la EDO con condiciones iniciales

$$x'' + 4x' + 13x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$