Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Pauta Solución Interrogación 2

1. Resuelva la EDO homogénea

$$y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0.$$

Solución

La ecuación característica de la EDO es

$$\begin{aligned} r^8 - 2r^4 + 1 = 0. \\ \iff (r^4 - 1)^2 = 0 \\ \iff (r^2 - 1)^2(r^2 + 1)^2 = 0 \\ \iff (r - 1)^2(r + 1)^2(r + i)^2(r + i)^2 = 0 \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son: $r = 1, r = -1, r = i, r = -i$ todas de multiplicidad 2. Por lo tanto, la solución de la EDO es de la forma

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + c_5 e^x + c_6 x e^x + c_7 e^{-x} + c_8 x e^{-x}.$$

Puntaje

- Determina ecuación característica correcta: 2 puntos.
- Determina raíces correctas de ecuación característica: 2 puntos.
- Determina solución general correcta y justificada: 2 puntos
- El puntaje de los ítem anteriores no se subdivide.

2. Determine el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ tal que la solución del siguiente PVI

$$\begin{cases} x'' = x + at\mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = \frac{1}{4}, x'(0) = 0 \end{cases}$$

es acotada cuando $t \to +\infty$.

Solución

La ecuación homogénea asociada tiene solución

$$x_c(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Para buscar una solución particular usamos el método de variación de parámetros: Sean $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$. El wronskiano es $W(x_1, x_2)(t) = 2$. Luego:

$$x_p(t) = -\frac{e^t}{2}\int (e^{-t})(ate^{-t})dt + \frac{e^{-t}}{2}\int (e^t)(ate^{-t})dt = \frac{-a}{8}e^{-t}(1 + t + 2t^2).$$

Por lo tanto la solución general de la EDO es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{a}{8}e^{-t}(1 + t + 2t^2).$$

Dadas las condiciones iniciales, obtenemos que

$$c_1 = \frac{a+1}{8}, \quad c_2 = \frac{1}{8}$$

por lo que

$$x(t) = \left(\frac{a+1}{8}\right)e^t + \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{a}{8}e^{-t}(1 + t + 2t^2).$$

Finalmente $\lim_{t\to\infty} x(t)$ resulta una función acotada si y sólo si $a = -1$, ya que para ese valor del parámetro se anula el primer término de la solución.

Puntaje

- Resuelve correctamente la EDO homogénea: 1 punto
- Determina correctamente solución particular: 2 puntos
- Determina correctamente solución general de la EDO: 1 punto
- Encuentre correctamente las constantes c_1 y c_2: 2 puntos
- Determina correcta y justificadamente el valor de a: 1 punto
- El puntaje de los ítem anteriores no se subdivide.

3. Considere el siguiente PVI que modela el movimiento de un objeto unido a un resorte:

$$\begin{cases} x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = x'(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Determine el tiempo $t > 0$ para el cual la posición $x(t)$ del objeto llega a su valor máximo.

(b) Si en el instante t se aplica una fuerza externa $f(t) = e^{-t}\cos(t)$, ¿cuál será el comportamiento del objeto cuando $t \to \infty$? Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN

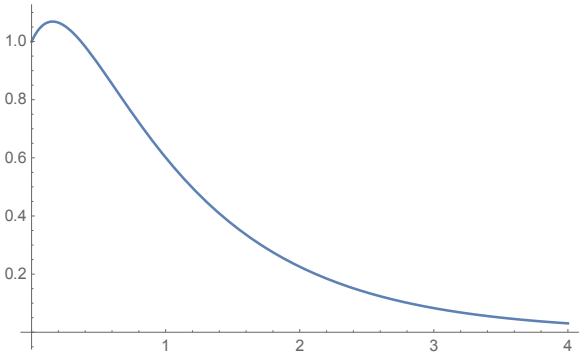
(a) El sistema corresponde a un movimiento sobreamortiguado por lo que el punto crítico de la solución que modela la posición corresponde al instante donde el objeto alcanza su máximo desplazamiento.

La ecuación característica es $r^2 + 5r + 4 = 0$ y sus raíces $r = -1, r = -4$. Dadas las condiciones iniciales, la solución es

$$x(t) = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}.$$

Para encontrar el punto de máximo desplazamiento, resolvemos $x'(t) = 0$:

$$x'(t) = 0 \iff -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t} = 0 \iff 8e^{-3t} = 5 \iff t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{8}\right)$$



(b) La dinámica del movimiento del objeto expuesto a la fuerza externa es gobernado por la ecuación no homogénea $x'' + 5x' + 4x = e^{-t}\cos(t)$ la cual, por el método de coeficientes indeterminados, tiene una solución general de la forma

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-4t} + Ae^{-t}\cos(t) + Be^{-t}\sin(t).$$

Así, cuando $t \to \infty$, la solución $x(t) \to 0$, independiente de los valores de c_1, c_2, A y B, es decir, el objeto tiende a volver a la posición de origen.

PUNTAJE

- Determina la solución $x(t)$ para la ecuación homogénea: 1 punto.

- Encuentra el valor de t buscado: 1 punto.
- Justifica correctamente que el valor encontrado de t es un punto de máximo: 1 punto
- Determina la forma que tiene la solución de la ecuación no homogénea o la encuentra explícitamente: 2 puntos.
- Calcula correctamente el límite y determina el comportamiento del objeto: 1 punto.
- El puntaje de los ítem anteriores no se subdivide.

4. Tenemos un sistema de tres estanques conectados, con volúmenes de 3,2 y 4 litros, que están llenos de agua y una cantidad de $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ de gramos de sal tales que las mezclas en los tres estanques se conservan uniforme por agitación. Suponga que entran 6 litros por minuto de agua fresca en Estanque 1 , salen 18 litros por minuto de estanque 2, y entra 12 litros por minuto de agua fresca en estanque 3. Además fluyen 6 litros por minuto de solución desde el Estanque 1 al Estanque 2 y 12 litros por minuto desde el Estanque 3 al Estanque 2 .

   (a) Determine un sistema de ecuaciones que modele la cantidad de sal en los estanques.

   (b) Usando el método de valores propios, determine la cantidad de sal que habrá en cada estanque en el instante t sabiendo que las cantidad de sal iniciales son $x_1(0) = 22$ gramos, $x_2(0) = 10$ gramos y $x_3(0) = 8$ gramos.

Solución

a) La tasa de cambio de la cantidad de sal en el Estanque i en el instante t es

$$x_i'(t) = \frac{\text{flujo de entrada} \cdot \text{cantidad de sal entrante}}{\text{Volumen de estanque de origen}} - \frac{\text{flujo de salida} \cdot \text{ cantidad de sal saliente}}{\text{Volumen de estanque receptor}}$$

Del enunciado se tiene que las cantidades de sal $x_i(t)$ y sus tasas de cambio satisfacen el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \dfrac{-6}{3}x_1(t) \\ x_2'(t) = \dfrac{6}{3}x_1 - \dfrac{18}{2}x_2(t) + \dfrac{12}{4}x_3(t) \\ x_3'(t) = \dfrac{-12}{4}x_3(t) \end{cases}$$

el que equivalentemente se puede escribir como sistema matricial

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -9-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda+9)(\lambda+3)$$

por lo que los valores propios de la matriz son

$$\lambda = -2, \lambda = -3, \lambda = -9.$$

Determinamos vectores propios:

– Para $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -2+2 & 0 & 0 \\ 2 & -9+2 & 3 \\ 0 & 0 & -3+2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{v} \in \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

– Para $\lambda = -3$:

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 0 & 0 \\ 2 & -9+3 & 3 \\ 0 & 0 & -3+3 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{v} \in \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

– Para $\lambda = -9$:

$$\begin{bmatrix} -2+9 & 0 & 0 \\ 2 & -9+9 & 3 \\ 0 & 0 & -3+9 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{v} \in \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo tanto la solución al sistema es de la forma

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-9t}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales:

$$x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7c_1 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 \\ 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\implies c_1 = \frac{22}{7}, c_2 = 4, c_3 = \frac{-2}{7}.$$

Por lo tanto las cantidades de sal en cada estanque en el instante t son:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 22e^{-2t} \\ x_2(t) &= \tfrac{44}{7}e^{-2t} + 4e^{-3t} - \tfrac{2}{7}e^{-9t} \\ x_3(t) &= 8e^{-3t}. \end{aligned}$$

Puntaje

- Escribe el sistema de ecuaciones diferenciales correcto: 1 puntos.
- Si además justifica cómo obtuvo las ecuaciones: 2 puntos.
- Determina los valores y vectores propios: 1 punto
- Escribe la forma del vector solución del sistema $x(t)$ usando los valores y vectores propios: 1 punto
- Determina explícitamente las soluciones de cada ecuación: 1 punto.
- El puntaje de los ítem anteriores no se subdivide.