PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Segundo semestre 2025

Interrogación 3 - MAT1640

Instrucciones: Responda de forma clara y justifique todos los pasos. Duración: **2 horas**.
Puntaje total: **48 puntos**.

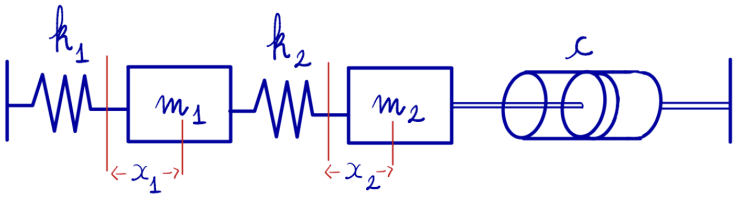
Pregunta 1. (12 puntos)

Resuelva mediante el método de coeficientes indeterminados el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Pregunta 2. (6 puntos)

Considere un sistema mecánico dado por dos masas m_1 y m_2 unidas entre si por un resorte con constante de restitución k_2, donde la primera masa está adicionalmente unida a una pared por un resorte con constante de restitución k_1 y la segunda masa esta unida a un amortiguador con constante de amortiguación c, como se muestra en la figura.



Suponga que $x_1(t)$ es el desplazamiento de el primer cuerpo con respecto a su punto de equilibrio y $x_2(t)$ es el desplazamiento del segundo cuerpo con respecto a su punto de equilibrio, ambos en función del tiempo t.

(a) Plantee un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden para x_1 y x_2.
Indicación: para cada masa analice las fuerzas externas actuando sobre ellas y recuerde la segunda Ley de Newton, $F = ma$.

(b) Encuentre un sistema de primer orden equivalente.

Pregunta 3. (6 puntos)

Encuentre e^A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 4. (12 puntos)

Considere el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + ay$$

Encuentre el tipo del punto crítico $(0, 0)$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

Pregunta 5. (12 puntos)

Considere el sistema lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, para $t \geq 0$, donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

con $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo.

(a) Determine una solución particular al sistema no homogéneo.

(b) Para $a \in \mathbb{R}$, encuentre la solución al PVI con condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

y luego determine el valor de a tal que la solución satisfaga además la condición $x_1(1) = 1$.

Solución P1

Consideremos primero el sistema homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al ser A triangular superior, sus valores propios son las entradas diagonales:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1,$$

donde valor propio $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2.

Para $\lambda = 1$, su vector propios se obtiene al resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{definimos} \quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El vector propio generalizado sale de resolver el sistema $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{definimos} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, un vector propio asociado a $\lambda = -1$ se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{definimos} \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se deduce que 3 soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{x}_1 = e^t\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{x}_2 = e^t(t\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{x}_3 = e^{-t}\mathbf{u}_3$$

y entonces, la solución general al sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Para obtener una solución particular al sistema no homogéneo usamos coeficientes indeterminados. Como hay resonancia entre $\mathbf{f}(t)$ y la solución complementaria, proponemos una solución particular de la forma $\mathbf{x}(t) = (t\mathbf{a} + \mathbf{b})e^{-t}$, con primera derivada $\mathbf{x}'(t) = (\mathbf{a} - t\mathbf{a} - \mathbf{b})e^{-t}$, la cual debe ser igual a

$$A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) = \left(A(t\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) e^{-t}.$$

De lo anterior se deducen las ecuaciones

$$-\mathbf{a} = A\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = A\mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir, $\mathbf{a}$ debe ser un vector propio de A para el valor propio $\lambda = -1$. Tomamos $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$ y luego

$$(A + I)\mathbf{e} = \mathbf{a} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 - 2 \end{pmatrix}$$

Lo anterior equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 - 2 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $b_2 = 0$, $b_1 = 0$, $a_3 = 2$ y b_3 queda libre, por lo tanto, podemos escoger $b_3 = 0$. Luego la solución particular es

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2te^{-t} \end{pmatrix}$$

Combinando homogénea y particular obtenemos la solución general

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2te^{-t} \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^t + C_2 te^t, \\ x_2(t) &= C_2 e^t, \\ x_3(t) &= C_3 e^{-t} + 2te^{-t}. \end{aligned}}$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Encontrar** los valores propios
3 ptos	**1 punto** por **calcular** cada valor propio o valor propio generalizado.
1 pto	**Plantear** las 3 soluciones linealmente independientes de la ec. homogénea por separado o escribir la solución complementaria correcta.
1 pto	**Plantear** la solución particular de acuerdo al método de coeficientes indeterminados.
4 ptos	**Encontrar** correctamente el valor de la solución particular.
2 ptos	**Escribir** la solución general.

Solución problema 2: Usamos la segunda ley de Newton para x_1 y x_2. Sobre el primer cuerpo actúan las fuerzas ejercidas por los resortes. Por la ley de Hooke, la fuerza ejercida por el primer resorte es $-k_1x_1$ mientras que la fuerza ejercida por el segundo resorte es $-k_2(x_1 - x_2)$. Por lo tanto

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2).$$

Las fuerzas actuando sobre el segundo cuerpo son las ejercidas por el segundo resorte y el amortiguador. La fuerza ejercida por el segundo resorte es $-k_2(x_2 - x_1)$ mientras que la fuerza ejercida por el amortiguador es $-cx_2'$. Por lo tanto

$$m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - cx_2'.$$

Llegamos al sistema

$$\begin{cases} x_1'' = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\ x_2'' = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{c}{m_2}x_2' \end{cases}$$

Un sistema de primer orden equivalente se obtiene haciendo introduciendo las variables $y_1 = x_1, y_2 = x_1', y_3 = x_2, y_4 = x_2'$. De esta manera obtenemos el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k_1+k_2}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_3 - \frac{c}{m_2}y_4 \end{cases}$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
2 ptos	**Plantear** la ecuación de 2do orden para x_1.
2 ptos	**Plantear** la ecuación de 2do orden para x_2.
2 ptos	**Determinar** el sistema lineal de primer orden.

Solución problema 3 Podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente los dos sumandos conmutan (ya que el primero es la identidad). Por lo tanto podemos calcular la exponencial de la suma como el producto de las exponenciales. Claramente

$$\exp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\exp A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e & 5e \\ 0 & e & 2e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Separar** lala matriz en su parte diagonal D y nilpotente N.
1 pto	**Calcular** la matriz exponencial de la parte diagonal.
1 pto	**Calcular** N^2.
1 pto	**Calcular** N^3.
1 pto	**Calcular** la matriz exponencial de N.
1 pto	**Obtener** el valor correcto de la matriz exponencial de A.

Solución problema 4: El determinate de la matriz asociada es a^2+1 que es distinto de 0 por lo tanto podemos aplicar el criterio asociado a los valores propios. El polinomio carácterístico es

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & -1 \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2a\lambda + 1 + a^2.$$

Las soluciones son

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(1+a^2)}}{2} = a \pm i.$$

Si $a > 0$ los valores propios son complejos de parte real positiva y el punto crítico es un espiral divergente (inestable). Si $a < 0$ los valores propios son complejos de parte real negativa y el punto crítico es un espiral convergente (estable). Si $a = 0$ los valores propios son imaginarios puros y el punto crítico es un centro (estable).

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Plantear** la ecuación característica.
2 ptos	**Calcular** los valores propios.
3 ptos	**2 puntos** por **indentificar** el tipo de punto crítico para el caso $a > 0$ y **1 punto** por **indentificar** su inestabilidad.
3 ptos	**2 puntos** por **indentificar** el tipo de punto crítico para el caso $a = 0$ y **1 punto** por **indentificar** su estabilidad.
3 ptos	**2 puntos** por **indentificar** el tipo de punto crítico para el caso $a < 0$ y **1 punto** por **indentificar** su estabilidad.

Solución Problema 5, parte (a)

Por variación de parámetros, la solución general a la ecuación diferencial es

$$x(t) = \Phi(t)\left(\mathbf{c} + \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds\right) \quad \text{con} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde $\det(\Phi(t)) = 1$, y por lo tanto

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\Phi(t)^{-1} f(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Plantear** la fórmula de variación de parámetros.
1 pto	**Calcular** la matriz inversa $\Phi^{-1}(t)$.
1 pto	**Calcular** el producto $\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$.
1 pto	**Calcular** la integral $\int_0^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)$ds.
1 pto	**Determinar** correctamente la solución particular.
1 pto	**Determinar** correctamente la solución general.

Solución Problema 5, parte (b)

Como $\Phi(0) = I$ y usando las condiciones iniciales, se tiene que la solución al PVI se obtiene al reemplazar $\mathbf{c} = \Phi(0)^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$, por lo tanto

$$x(t) = a\begin{pmatrix} te^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^t \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Otra forma de expresar la solución es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= te^t a + \tfrac{t^2}{2}e^t = \tfrac{te^t}{2}(2a+t), \\ x_2(t) &= ae^{-t} + te^{-t} = (a+t)e^{-t}. \end{aligned}}$$

Imponiendo ahora la condición $x_1(1) = 1$ se llega a que

$$\frac{e}{2}(2a+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2/e - 1}{2}.$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
2 ptos	**Calcular** las constantes $c_1 = a$ y $c_2 = 0$.
2 ptos	**Imponer** la igualdad $x_1(1) = 1$ sobre la solución al PVI.
2 ptos	**Determinar** el valor correcto de a.