MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Clase 4)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la clase anterior

EDO's de variable separable: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

- Cálculo de soluciones:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)dx$$

Si $F(y)$ es antiderivada de $\frac{1}{h(y)}$; $G(x)$ es antiderivada de $g(x)$, entonces

$$F(y) = G(x) + C \quad \text{(solución general definida implícitamente)}$$

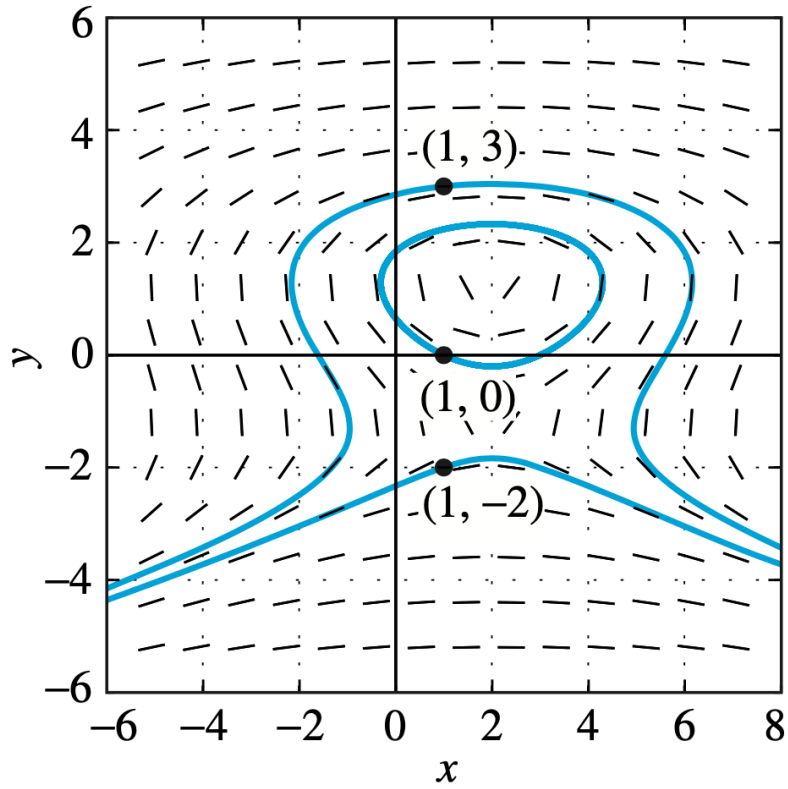
Obs. Para cada $C \in \mathbb{R}$, la igualdad anterior define una curva que puede estar compuesta de más de una solución. Las soluciones terminan donde hay pendiente infinita.

Ejemplos de resolución de EDO's separables

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-2x}{3y^2-5}; \quad y(1) = 3.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y^3 - 5y + x^2 - 4x = C, \quad C \in \mathbb{R}}_{\text{sol. general (implícita)}}$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y^3 - 5y + x^2 - 4x = 9}_{\text{sol. particular (implícita)}}$

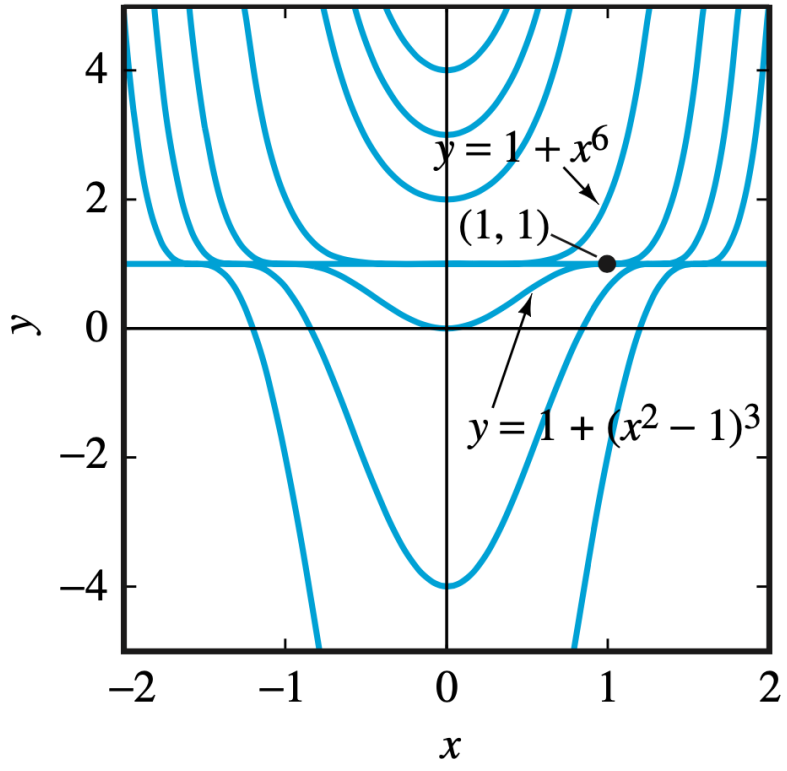


Obs. La solución al PVI anterior es válida en un intervalo donde su gráfica no tenga recta tangente de pendiente infinita.

5. $\dfrac{dy}{dx} = 6x(y-1)^{2/3}; \quad y(1) = 1.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = 1 + (x^2 + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}}_{\text{sol. general (explícita)}}$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = 1 + (x^2 - 1)^3}_{\text{sol. particular (explícita)}}$



¿Hay más soluciones? $\longrightarrow$ $y(x) = 1$ es solución singular.

¿Por qué no aparece al usar el método de integración?

$\longrightarrow$ La solución $y(x) = 1$ se perdió al separar variables.

Obs. Multiplicar o dividir por factores algebraicos puede resultar en perder o ganar soluciones.

Ejemplos aplicados

1. [Ley de enfriamiento de Newton]

Modela como varía la temperatura de un cuerpo inmerso en un medio a temperatura constante.

$T(t)$: temp. de un cuerpo inmerso en un medio a temp. constante A.

T_0: temperatura inicial del cuerpo; k: constante de proporcionalidad.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(A - T) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \longrightarrow \quad T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}.$$

2. [Ley de Torricelli]

Modela como se vacía un estanque con agua que tiene un orificio en su fonda de area α.

t: tiempo; g aceleración de gravedad; $y(t)$: profundidad del agua;
$A(y)$: area transversal del estanque a altura y;

$$A(y)y' = -\alpha\sqrt{2gy}$$

Otro caso particular de EDO de 1er orden

Def. Una EDO lineal de 1er orden es una ecuación de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

(notar que si $Q(x) = 0$ la EDO es de variable separable)

Su forma normal es: $y' = \underbrace{Q(x) - P(x)y}_{f(x,y)}$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas, entonces $f(x, y)$ satisface las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad.

Teorema.[versión 1] Si los coeficientes de la ecuación $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto I que contiene a x_0, entonces el PVI

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene una única solución en I.

¿Cómo calculamos la (única) solución al PVI?

Partamos con un ejemplo sencillo: $y' + y = e^{-x}, \quad y(0)=1$

(multiplicamos por e^x) $\Rightarrow \quad e^x y' + e^x y = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^x y) = 1$

(integramos ambos lados) $\Rightarrow \quad e^x y = x + C$

(despejamos) $\Rightarrow \quad \boxed{y = xe^{-x} + Ce^{-x}}$

La condición inicial nos da la constante $C = 1$.

Al factor e^x se le llama el factor integrante asociado a la EDO.

Veremos que cada EDO lineal de 1er orden tiene asociado un factor integrante, y este nos permite resolver la ecuación.

Volvamos a $y' + P(x)y = Q(x)$

¿Cuál es el factor integrante en el caso general?

Notemos que por el TFC

$$\frac{d}{dx}\left(\int P(x)dx\right) = P(x)$$

Luego, por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right) = P(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Entonces, por regla del producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\int P(x)dx}\right) &= y'e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} \\ &= (y' + P(x)y)e^{\int P(x)dx}\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)$ por $e^{\int P(x)dx}$ obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Finalmente, integrando a ambos lados obtenemos (por TFC) :

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx,$$

por lo tanto, hemos resuelto la EDO!

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx,$$

En la práctica, el método del factor integrante consiste en:

1. Calcular el factor integrante (f.i.): $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$
   (sirve cualquier antiderivada de P)
2. Al multiplicar por el f.i. se llega a: $(y(x)\rho(x))' = Q(x)\rho(x)$
3. Integrar y despejar $y(x)$: $y(x) = \dfrac{1}{\rho(x)} \cdot \int [Q(x)\rho(x)]\, dx$
   (no olvidar la constante C al integrar)
4. La condición inicial $y(x_0) = y_0$ determina la constante C del paso 3.

Obs. Hay que recordar el método y no la formula final.

En resumen:

Teorema. [**versión 2**] Si $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo abierto I con $x_0 \in I$, el PVI

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene solución única en I, la cual es calcula mediante el método del factor integrante.

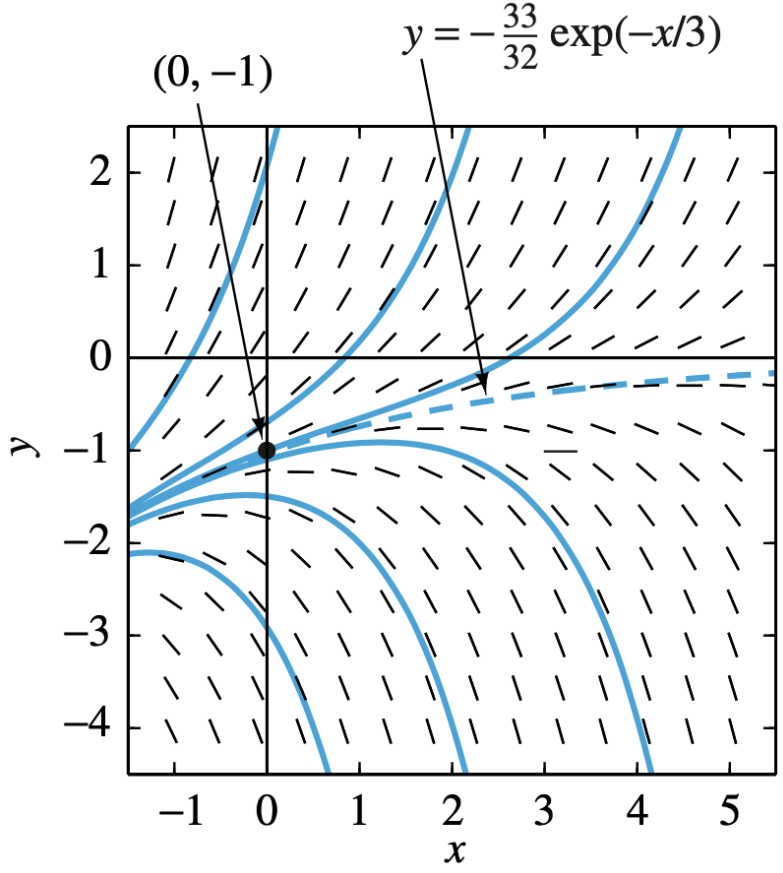
Obs. La solución existe (y es única) en todo punto donde $P(x)$ y $Q(x)$ sean continuas.

Obs. No hay soluciones singulares (toda solución proviene de la forma general que entrega el método del factor integrante)

Obs. Si los coeficientes P y Q son constantes existe solución única al PVI en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplos.

1. $\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{11}{8}e^{-x/3}, \quad y(0) = -1$



Solución general:

$$y(x) = Ce^{x} - \frac{33}{32}e^{-x/3}$$

Solución particular:

$$y(x) = \frac{1}{32}e^{x} - \frac{33}{32}e^{-x/3}$$

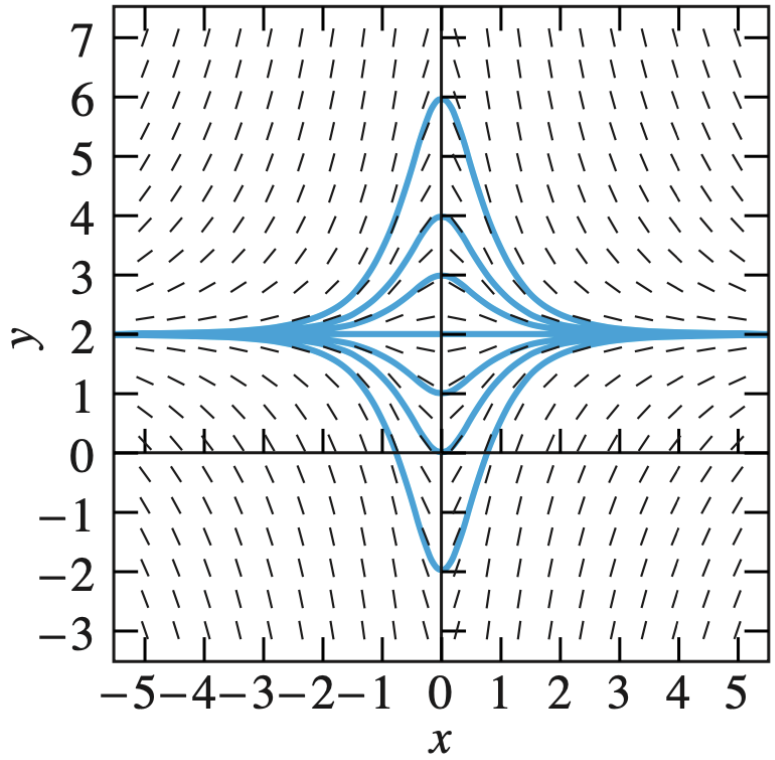
Consideremos otra condición inicial, $y(0) = y_0$ y analicemos el comportamiento de la solución en función de y_0.

Al valor $y_0 = -\frac{33}{32}$ se le denomina una condición inicial crítica, ya que marca un cambio drástico en comportamiento de las soluciones.

2. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 6x$

Solución general:

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2}$$

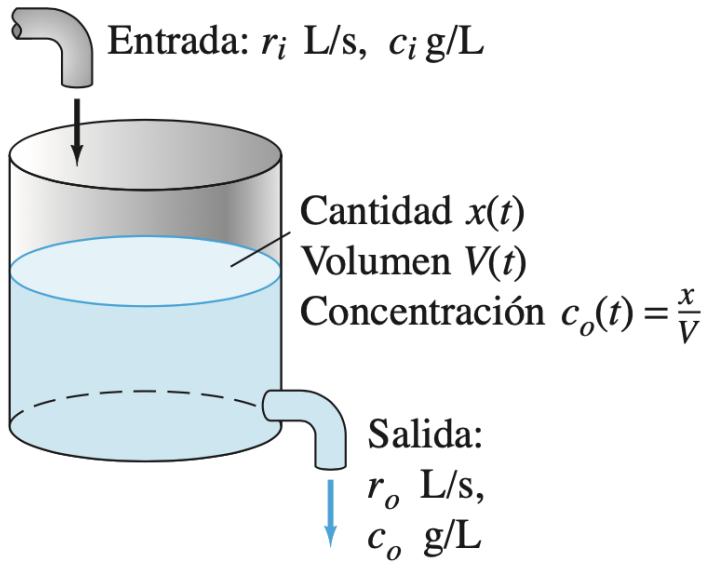


¿Que tiene de especial la solución del PVI con $y(0) = 2$?

A las soluciones constantes se les suele llamar soluciones de equilibrio (esta denominación toma mayor sentido si se interpreta la variable independiente como *tiempo*)

Ejemplo Aplicado: **Problema de mezclas**

Se busca modelar la variación (con respecto al tiempo) de la cantidad $x(t)$ de un soluto (sal) contenida en una solución (sal y agua) cuando hay un flujo conocido de entrada y salida de la sustancia.



¿ Como obtenemos $\frac{dx}{dt}$?

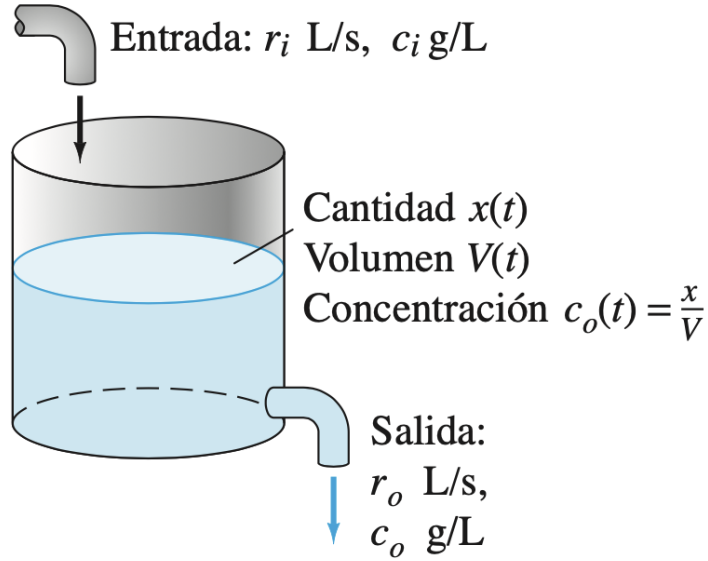
Supongamos que conocemos:

- el volumen inicial de solución en el estanque: V_0 [L];
- los flujo constantes de entrada r_i y de salida r_o (en [L/s]);
- las concentraciones de soluto (en [g/L]) en el flujo de entrada c_i (constante) y en el de salida $c_o(t)$.

Ejemplo Aplicado: **Problema de mezclas**

Conocemos:

- el volumen inicial de solución en el estanque, V_0;
- los flujo constantes de entrada r_i y de salida r_o (en [L/s]);
- las concentraciones de soluto (en [g/L]) en el flujo de entrada c_i (constante) y en el de salida $c_o(t)$.



En un intervalo de tiempo pequeño $[t, t + \Delta t]$ aproximamos

$$\Delta x \approx r_i c_i \Delta t - r_o c_o \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_o c_o$$

Tomando el límite $\Delta t \to 0$ se obtiene que $x'(t) = r_i c_i - r_o c_o(t)$

Falta notar que $c_o(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$ donde el volumen de soluto en el estanque es $V(t) = V_0 + (r_i - r_o)t$. $\longrightarrow$ $\boxed{x' = r_i c_i - \frac{r_o}{V(t)} x}$