MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
RESOLUCIÓN INTERROGACIÓN 1

1. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y\ \mathrm{sen}(x)}{-2y + \cos(x)}\,. \qquad \textbf{(3 ptos)}$$

(b) Encuentre la solución general de $y' + 5y = xy^3$. **(3 ptos)**

Solución
(a) La ecuación es equivalente a

$$\underbrace{(\,2y - \cos(x)\,)}_{M(y,x)}\,dy \;+\; \underbrace{(\,x^3 + y\,\mathrm{sen}(x)\,)}_{N(y,x)}\,dx = 0\,.$$

Como $M_x - N_y = \sin(x) - \sin(x) = 0$, la ecuación diferencial es exacta.
Luego, su solución general es $f(y,x) = C$, donde $f(y,x)$ es una función a determinar con:

$$f_y(y,x) = 2y - \cos(x) \tag{1}$$
$$f_x(y,x) = x^3 + y\,\mathrm{sen}(x)\,. \tag{2}$$

Integrando (1) con respecto a y tenemos que

$$f(y,x) = y^2 - y\cos(x) + \varphi(x),$$

para alguna función $\varphi(x)$ por determinar.
Derivando la última igualdad con respecto a x y usando la condición (2) tenemos que

$$f_x(y,x) = y\,\sin(x) + \varphi'(x) = x^3 + y\sin(x) \Longrightarrow \varphi'(x) = x^3 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{x^4}{4}\,.$$

Así, la solución general de la ecuación es $y^2 - y\cos(x) + \frac{x^4}{4} = C$.

Solución
(b) Es una *ecuación de Bernoulli*. Hacemos el cambio de variables $z = 1/y^2$ o, equivalentemente, $y = z^{-1/2}$. Con él la ecuación toma la forma

$$-\frac{1}{2z^{3/2}}\,z' + \frac{5}{z^{1/2}} = \frac{x}{z^{3/2}} \Longrightarrow z' - 10z = -2x,$$

la cual es una ecuación lineal para la función $z(x)$ cuya solución es:

$$z = e^{10x}\left(-2\int xe^{-10x}\,dx + C\right).$$

Integrando por partes, $\displaystyle\int xe^{-10x}\,dx = -\frac{x}{10}\,e^{-10x} - \frac{1}{100}\,e^{-10x}\,.$
Sustituyendo y reemplazando por la variable original obtenemos

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{50} + \frac{x}{5} + Ce^{10x}$$

2. Resuelva el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \cos(x)\,\dfrac{dy}{dx} - \operatorname{sen}(x)y = -2x \\ y(0) = \pi^2/4, \end{cases} \qquad \textbf{(6 ptos)} \tag{3}$$

y determine el intervalo más grande posible de definición de la solución.

Solución
Escribamos la ecuación (3) en la forma

$$(\cos(x)\,y)' = -2x.$$

Integrando, obtenemos

$$\cos(x)\,y = -x^2 + C,$$

ó, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$y(x) = \frac{-x^2 + C}{\cos(x)},$$

donde C es una constante arbitraria. Satisfaciendo la condición inicial en (3), obtenemos

$$y(x) = \frac{\pi^2/4 - x^2}{\cos(x)}. \tag{4}$$

La función $y(x)$ es bien definida en todos los intervalos siguientes:

$$(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Elegiendo el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ que contiene el punto inicial $x = 0$, encontramos que *a priori* la solución (4) del problema (3) es bien definida en este intervalo.
Como los límites

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} y(x), \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y(x), \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} y'(x), \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y'(x)$$

existen y son finitos. Luego, podemos extender la solución $y(x)$ dada en (3) al intervalo $(-3\pi/2, 3\pi/2)$.

Como los límites unilaterales de $y(x)$ cuando $x \downarrow -3\pi/2$ y cuando $x \uparrow 3\pi/2$ son infinitos, no podemos extender la solución fuera de este intervalo.

Como resultado, el intervalo más grande posible de definición de la solución del PVI es el intervalo abierto $(-3\pi/2, 3\pi/2)$.

3. Considere el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.):

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3}e^{-y^{2/3}}\,, \quad y(0) = 0\,.$$

(a) Pruebe que el P.V.I. no tiene una única solución. **(4 ptos)**

(b) Explique por qué el resultado de (a) no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad. **(2 ptos)**

Solución

(a) Notemos que si $y(x)$ es una solución de la ecuación tenemos que

$$\int e^{y^{2/3}} y^{-1/3} dy = x + C$$

donde C es una constante. Esto implica que

$$e^{y^{2/3}} = \frac{2}{3}\,(x + C).$$

Agregando la exigencia que y satisfaga la condición inicial vemos que

$$y(x) = (\ln(1 + (2/3)x))^{3/2} \quad \text{para} \quad x \geq 0.$$

Ahora notemos que

$$y(x) = 0 \qquad \text{para} \quad x \geq 0,$$

tambien resuelve el problema de valores iniciales. Esto prueba que no hay unicidad del PVI.

Solución

(b) En efecto, este resultado no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad puesto que la función de la derecha de la ecuación $f(y, x) = y^{1/3}e^{-y^{2/3}}$, aunque es continua en una vecindad de $(0, 0)$ la derivada parcial

$$D_y f(y, x) = \frac{1}{3} y^{-2/3}\, e^{-y^{2/3}} - \frac{2}{3} y^{1/3} y^{-1/3} e^{-y^{2/3}} = \left(\frac{1}{3}\, y^{-2/3} - \frac{2}{3}\right) e^{-y^{2/3}}$$

no tiene derivada parcial en en $y = 0$.

4. Un modelo de la población $P(t)$ que habita en un suburbio de una gran ciudad está dado por el problema de valor inicial:

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P)\,, \quad P(0) = 200.000$$

donde t es el tiempo en meses y $P(t)$ es la población en el tiempo t medida en miles.

(a) ¿Cuál es el valor de la mayor población posible del suburbio ? **(4 ptos)**

(b) ¿En qué momento la población será igual a la mitad de ese valor ? **(2 ptos)**

Solución
(a)
Para simplificar la notación escribimos la ecuación como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP(\ell - P)$$

con $k = 10^{-7}$, $\ell = 10^6$.

Aplicando el método de variables separables obtenemos que:

$$\int_0^t \frac{1}{P(\ell - P)}\, dP = \int_0^t k\, dt \Longrightarrow \int_0^t \frac{1}{P} + \frac{1}{(\ell - P)}\, dP = \int_0^t k\ell\, dt\,.$$

Integrando y despejando se obtiene que:

$$P(t) = \frac{\ell P(0)}{P(0) - (P(0) - \ell)e^{-k\ell t}}, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Observamos que el denominador nunca se anula para $t \geq 0$ puesto que la ecuación

$$2 \cdot 10^5 = (2 \cdot 10^5 - 10^6)e^{-t/10} = -8 \cdot 10^5 e^{-t/10} = \text{ no tiene solución para ningún } t.$$

Por lo tanto, la solución no tiende a infinito en tiempo finito. Mirando la solución (5), el mayor valor posible se calcula tendiendo t a ∞,

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \ell = 10^6.$$

Solución
(b)
Sea τ el tiempo cuando $P(\tau) = \ell/2$. Por (5) tenemos

$$P(\tau) = \frac{\ell P(0)}{P(0) - (P(0) - \ell)e^{-k\ell\tau}}, \quad t \geq 0.$$

Reemplazando $k = 10^{-7}$, $\ell = 10^6$, $P(0) = 200000$, encontramos que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4e^{-\tau/10}},$$

es decir

$$\tau = 10 \ln 4 = 20 \ln 2 \text{ meses.}$$