MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 16)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Motivación

En la práctica, es usual que existan múltiples funciones incógnitas para una misma variable independiente.

Basta considerar la posición $(x(t), y(t), z(t))$ en el espacio de un cuerpo como función del tiempo.

Según las leyes de Newton, la evolución de la posición de cuerpo de masa m está determinada por su relación su velocidad instantánea $(x'(t), y'(t), z'(t))$ y su aceleración $(x''(t), y''(t), z''(t))$.

Luego, si F_1, F_2, F_3 son funciones que representan fuerzas, se obtiene un **sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\begin{aligned} mx'' &= F_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ my'' &= F_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz'' &= F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned}$$

Obs. Las funciones incógnitas $(x(t), y(t), z(t))$ y sus derivadas, se mezclan en las distintas ecuaciones (de segundo orden).

Por ejemplo, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con dos ecuaciones y dos incógnitas es de la forma:

$$f(t, x, y, x', y') = 0$$
$$g(t, x, y, x', y') = 0$$

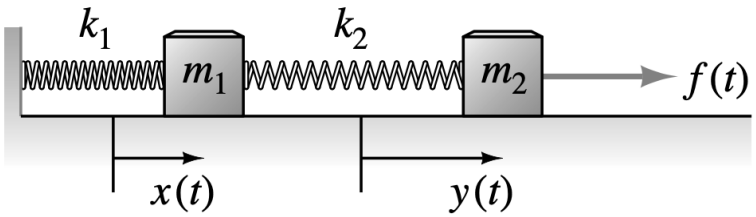
Obs. Un sistema puede tener más ecuaciones, más funciones incógnitas, y pueden aparecer derivadas de orden mayor (que determina el orden del sistema).

En el ejemplo anterior, la solución al sistema está dada por un par de funciones $x(t)$, $y(t)$ que satisfacen ambas ecuaciones.

Ejemplos.

- Sistema de 2 masas y 2 resortes: para constantes positivas k_1, k_2,

  $x(t)$: desplazamiento masa m_1; $y(t)$: desplazamiento masa m_2



$$m_1 x'' = -k_1 x + k_2(y - x)$$
$$m_2 y'' = -k_2(y - x) + f(t)$$

- Sistema depredador-presa: para constantes positivas a, b, p, q,

  $x(t)$: población de peces; $y(t)$: población de tiburones

$$\frac{dx}{dt} = ax - pxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -by + qxy$$

Ejemplos.

- EDO's de orden superior: toda ecuación de orden superior en *forma normal* se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden.

  Consideremos
  $$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

  Definimos las funciones
  $$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \ldots \quad , x_n = x^{(n-1)}$$

  Satisfacen el sistema de ecuaciones
  $$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{aligned}$$

Obs. De lo anterior se deduce que todo sistema de ecuaciones de orden n (en forma normal), se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden

Nuestro primer objetivo será estudiar **sistemas de ecuaciones lineales de primer orden**.

Veremos que muchas herramientas vistas previamente para ecuaciones lineales tienen un análogo en el caso de sistemas de ecuaciones lineales.

Def. Un **sistema lineal de primer orden** es un sistema de ecuaciones de la forma (n ecuaciones y n funciones incógnitas)

$$\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\
x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_1(t)
\end{aligned}$$

Def. El sistema es **homogéneo** si

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0,$$

de lo contrario es **no-homogéneo**.

Def. Una **solución** al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_1(t) \end{aligned}$$

es un colección de funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ que satisfacen todas las ecuaciones del sistema

Teorema. [**Existencia y unicidad para sistemas lineales**]
Si todos los coeficientes $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son continuas en un intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a un punto a, entonces, para cualquier $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, el sistema tiene una solución única que satisface las n condiciones iniciales

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \ldots \quad , x_n(a) = b_n.$$

Obs. La solución general al sistema lineal tiene n constantes arbitrarias. Estas constantes se fijan por medio de las n condiciones iniciales.

Repaso de matrices y notación matricial de un sistema.

Matriz $m \times n$:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrix transpuesta $(n \times m)$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrix $m \times 1$ **(vector columna)**:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrix $1 \times m$ **(vector fila)**:

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

Podemos escribir $\mathbf{A}$ usando vectores columna o vectores filas

$$\longrightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma y multiplicación por escalar

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son matrices $m \times n$, y $c, d \in \mathbb{R}$

- $\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c = [ca_{ij}]$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$
- $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$

Matriz cero $m \times n$: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Propiedades del producto

- Producto escalar entre vectores: sean $\mathbf{a} = [a_i]$, $\mathbf{b} = [b_i]$ vectores $1 \times n$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Producto entre matrices: sea $\mathbf{A}$ $m \times p$ y $\mathbf{B}$ $p \times n$, entonces $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es $m \times n$

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\mathbf{a}_i \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\mathbf{b}_j$$

- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$; $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- En general, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- Puede ocurrir que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ aunque $\mathbf{A}, \mathbf{B} \neq 0$

Matriz Identidad $n \times n$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- La matriz inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, que denotamos $\mathbf{A}^{-1}$, es aquella que satisface

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ (decimos que $\mathbf{A}$ es no singular)
- Inversa de una matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Función matricial:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad o \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

- Las funciones matriciales son continuas si todas sus entradas son funciones continuas.
- Las funciones matriciales son derivables si todas sus entradas son funciones derivables.

$$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$$

- $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}$
- Sea $c \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{C}$ una matriz constante:

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = c\frac{d\mathbf{A}}{dt}; \quad \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{0}; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{AC}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{C}$$

Estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales de primer orden utilizando una notación matricial.

El sistema de ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_1(t) \end{aligned}$$

Los escribimos de manera abreviada como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

donde $\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]$, $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]$ y $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$.

Obs. El teorema de existencia y unicidad nos garantiza la existencia de una solución única al PVI siempre que las funciones matriciales $\mathbf{P}$ y $\mathbf{f}$ sean continuas en un intervalo $\mathcal{I}$.

Teorema. [**Principio de superposición para sistemas lineales homogéneos**] Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en un intervalo $\mathcal{I}$, entonces para cualquier constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i(t)$$

es también una solución en $\mathcal{I}$.