PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Segundo semestre 2025

Pauta Examen - MAT1640

Pregunta 1 (12 puntos). Considere la siguiente ecuación diferencial de 4to orden

$$y'''' - \frac{1}{t}y''' + y'' - \frac{1}{t}y' = 0, \qquad t > 0,$$

y note que usando el operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$, la ecuación anterior se reescribe como:

$$(D^2+1)(D^2 - \tfrac{1}{t}D)y = (D^2 - \tfrac{1}{t}D)(D^2+1)y = 0.$$

(a) **(6 puntos)** Sabiendo que $y_1(t) = \ln(t)$, $y_2(t) = 1$ son soluciones, encuentre otras dos soluciones linealmente independientes a la ecuación anterior.

(b) **(6 puntos)** Considere ahora la ecuación no-homogénea

$$(D^2+1)\left((D^2 - \tfrac{1}{t}D)y - \ln(t)\right) = 0, \qquad t > 0.$$

Determine la solución general a esta ecuación diferencial.

Observación. El enunciado anterior tiene errores. Debido a esto, para la parte (a) se aceptan como respuestas

- 2 soluciones linealmente independientes a la ecuación $(D^2+1)(D^2 - \frac{1}{t}D)y = 0$
- 2 soluciones linealmente independientes a la ecuación $(D^2 - \frac{1}{t}D)(D^2+1)y = 0$

La parte (b) se decidió eliminar, y el puntaje es asignado a todos quienes hayan rendido el examen.

Solución P1

Opción 1. Para la ecuación factorizada $(D^2+1)(D^2 - \frac{1}{t}D)y = 0$, basta resolver la EDO de segundo orden $(D^2 - \frac{1}{t}D)y = 0$. Es claro que $y_1(t) = 1$ es solución. Usando la fórmula de Abel se obtiene una segunda solución l.i.

$$y_2(t) = 1 \cdot \int \frac{e^{-\int(-\frac{1}{t})dt}}{1^2}dt = \int e^{\ln(t)}dt = \int t dt = \frac{t^2}{2}.$$

Opción 2. Para la ecuación factorizada $(D^2+1)(D^2 - \frac{1}{t}D)y = 0$, basta resolver la EDO de segundo orden $(D^2 - \frac{1}{t}D)y = 0$. Usando el cambio de variables $v = y'$ reducimos el orden de la

ecuación y obtenemos $v' - \frac{1}{t}v = 0$, que es lineal. Por medio del factor integrante $e^{-\int \frac{1}{t}dt} = e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$, obtenemos

$$t^{-1}v = C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad v = Ct.$$

Si $C = 0$, entonces $y' = 0$, es decir $y = 1$ es solución (o cualquier otra constante), mientras que si $C \neq 0$ se llega a que $y' = Ct$, es decir, $y = C\frac{t^2}{2}$ es solución.

Opción 3. Dada la factorización del operador diferencial asociado a la ecuación de 4to orden, para encontrar dos soluciones linealmente independientes a la ecuación homogénea, basta resolver

$$(D^2 + 1)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + y = 0.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + \lambda = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = \pm i$. Se deduce entonces que dos soluciones l.i. a la ecuación de 2do orden, y por lo tanto a la ecuación de 4to orden, son $y_1(t) = \cos(t)$, $y_2(t) = \text{sen}(t)$.

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
2 ptos	**Identificar** que solamente se debe resolver una ecuación de 2do orden ($y'' + y = 0$ o $y'' - \frac{1}{t}y' = 0$).
2 ptos	**Deducir** al ojo que $y = 1$ es solución de $y'' - \frac{1}{t}y' = 0$ o realizar el cambio de variables $v = y'$. Alternativamente, **calcular** la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ asociada a $y'' + y = 0$ y **determinar** sus raíces $\lambda = \pm i$.
2 ptos	**Resolver** la ecuación $y'' - \frac{1}{t}y' = 0$ usando la fórmula de Abel (con solución $y = t^2/2$) o usando el cambio de variables para determinar las soluciones $y = A$, $y = Bt^2$ para algunas constantes $A, B \neq 0$). Alternativamente, en base a las soluciones a la ecuación característica para $y'' + y = 0$, determinar dos soluciones l.i. a valores reales, por ejemplo, $y(t) = \cos(t)$, $y(t) = \text{sen}(t)$.

Pregunta 2 (12 puntos) Encuentre una fórmula explícita para la solución al siguiente PVI y determine su dominio de existencia:

$$\left(\frac{2xy}{x^2+1} - 2x\right) dx + \left(\ln(x^2+1) - 2\right) dy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Solución problema 2:

Para poder utilizar el método de resolución de ecuaciones exactas, verificamos primero que efectivamente lo sea:

$$\partial_y \left(\frac{2xy}{x^2+1} - 2x\right) = \frac{2x}{x^2+1}, \qquad \partial_x \left(\ln(x^2+1) - 2\right) = \frac{2x}{x^2+1},$$

es decir, la ecuación es exacta.

Sea $F(x,y)$ tal que

$$F(x,y) = \int \left(\frac{2xy}{x^2+1} - 2x\right) dx = \ln(x^2+1)y - x^2 + g(y)$$

Luego, derivando con respecto a y se debe tener que

$$\partial_y F(x,y) = \ln(x^2+1) + g'(y) = \ln(x^2+1) - 2 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -2 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -2y$$

es decir,

$$F(x,y) = \ln(x^2+1)y - x^2 - 2y.$$

Por lo tanto, la solución implícita a la ecuación diferencial es $\ln(x^2+1)y - x^2 - 2y = C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Imponiendo la condición inicial se obtiene que $C = -2$, y entonces

$$y(x) = \frac{x^2 - 2}{\ln(x^2+1) - 2},$$

cuyo dominio de definición es el intervalo $(-\sqrt{e^2+1}, \sqrt{e^2+1})$ que se obtiene al determinar los valores de x tales que $\ln(x^2+1) - 2 = 0$.

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Verificar** que la ecuación es exacta o alternativamente, si no verificó que se cumpla criterio de exactitud, verificar que la solución obtenida por el método es efectivamente una solución a la ecuación.
1 pto	**Plantear** la integral de $\frac{2xy}{x^2+1} - 2x$ con respecto a x (o la de $\ln(x^2+1) - 2$ con respecto a y).
2 pto	**Calcular** correctamente la integral del criterio anterior, con constante de integración $g(y)$ (respectivamente, $g(x)$).
2 pto	**Derivar** correctamente $F(x,y)$ y determinar la ecuación diferencial para $g(y)$ (respectivamente, para $g(x)$).
1 pto	**Integrar** la ecuación diferencial para g y deducir el valor de $F(x,y)$ (con o sin constante de integración)
1 pto	**Plantear** la solución implícita a la ecuación diferencial exacta.
1 pto	**Imponer** la condición inicial.
1 pto	**Calcular** la solución explícita al PVI.
2 ptos	**Identificar** el dominio de definición de la solución al PVI.

Problema 3 (12 puntos) Encuentre los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x - 2y + \frac{5}{4}x^3. \end{cases}$$

Decida si cada uno de los puntos críticos es estable o inestable y determine cuál es su tipo.

Solución problema 3: Calculamos los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x,y) = y = 0, \quad G(x,y) = -5x + -2y + \frac{5}{4}x^3 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad y = 0, \quad x\left(-1 + \frac{1}{4}x^2\right) = 0 \\ &\Rightarrow \qquad y = 0, \quad x = 0, \pm 2 \end{aligned}$$

Luego los puntos críticos son $(0,0)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$ El Jacobiano asociado al sistema no lineal es

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 + \frac{15}{4}x^2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para el punto crítico $(0,0)$ la matriz Jacobiana es

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

con valores propios $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$. Se deduce que $(0,0)$ es un espiral convergente, por lo tanto estable.

Para los punto críticos $(\pm 2, 0)$ la matriz Jacobiana es

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda + 2) - 10 = \lambda^2 + 2\lambda - 10 = 0$$

con valores propios $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+40}}{2} = -1 \pm \sqrt{11}$. Se deduce que $(\pm 2, 0)$ son puntos sillas inestables.

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Plantear** las ecuaciones $F(x,y) = G(x,y) = 0$
3 ptos	**Determinar** los puntos críticos (**1 pto.** por cada punto crítico)
2 ptos	**Calcular** correctamente la matriz Jacobiana del sistema (o las derivadas parciales $\partial_x F, \partial_y F, \partial_x G, \partial_y G$ por separado)
3 pto	**Evaluar** correctamente la matriz Jacobiana en los puntos críticos y calcular los valores propios (**1 pto.** por hacer esto en cada punto crítico).
3 ptos	**Indentificar** correctamente el tipo y estabilidad de cada punto crítico (**1 pto.** por cada punto crítico).

Problema 4 (12 puntos) Encuentre la solución al PVI

$$x'' + 4x = \delta(t) + \delta(t-\pi), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Solución Problema 4. Tomando transformada de Laplace a la ecuación diferencial y usando las condiciones iniciales, se obtiene que $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ satisface

$$s^2X(s) + 4X(s) = 1 + e^{-\pi s} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+4}$$

Tomando transformada de Laplace inversa se llega a que

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}\right\} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + u(t-\pi)\frac{\operatorname{sen}(2(t-\pi))}{2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + u(t-\pi)\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2} & t < \pi \\ \operatorname{sen}(2t) & t \geq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
4 pto	**Aplicar** correctamente la T. de Laplace al lado izquierdo de la ecuación, obteniendo $s^2X(s)+4X(s)$.
2 pto	**Calcular** la T. de Laplace al lado derecho de la ecuación, obteniendo $1+e^{-\pi s}$ (**1 pto** por cada delta).
1 pto	**Despejar** $X(s)$.
2 pto	**Calcular** correctamente la transformada inversa de $\frac{1}{s^2+4}$.
3 pto	**Calcular** correctamente la transformada inversa de $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}$.

Problema 5 (12 puntos) Considere el PVI

$$tx'' + (3t-1)x' + 3x = 0, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Aplique la propiedad de la derivada de una transformada de Laplace para determinar una ecuación diferencial de primer orden para la transformada $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$. Solucione dicha ecuación para encontrar $X(s)$ y finalmente encuentre una solución no trivial $x(t)$ al PVI.

Solución Problema 5. Tomando transformada de Laplace a la ecuación se tiene que

$$\mathcal{L}\{tx''\} + 3\mathcal{L}\{tx'\} - \mathcal{L}\{x'\} + 3\mathcal{L}\{x\} = 0.$$

Usando las condiciones iniciales y la propiedad de la derivada de una transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{ds}\left(s^2X(s)\right) - 3\frac{d}{ds}\left(sX(s)\right) - sX(s) + 3X(s) = 0 \\ \Rightarrow \quad & -\left(2sX(s) + s^2X'(s)\right) - 3\left(X(s) + sX'(s)\right) - sX(s) + 3X(s) = 0 \end{aligned}$$

lo cual equivale a la siguiente ecuación diferencial de primer orden para $X(s)$:

$$X' = \frac{-3X}{s+3}.$$

Por el método de separación de variables, se tiene que

$$\ln(X) = \int \frac{-3}{s+3}ds = -3\ln(s+3) + C \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{A}{(s+3)^3} \quad \text{con} \quad A = e^C > 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa se deduce

$$x(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} = A\frac{t^2}{2}e^{-3t}$$

es solución no trivial para cualquier valor de $A \neq 0$.

Distribución de puntajes	
Puntaje	**Indicador**
1 pto	**Aplicar** transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación.
2 ptos	**Calcular** $\mathcal{L}\{tx''\} = -\frac{d}{ds}\left(s^2X(s)\right)$
2 ptos	**Calcular** $\mathcal{L}\{tx'\} = \frac{d}{ds}\left(sX(s)\right)$
2 ptos	**Obtener** la ecuación diferencial de primer order $X' = \frac{-3X}{s+3}$ o una expresión equivalente.
3 ptos	**Determinar** una solución (general o particular) no trivial del tipo $X(s) = \frac{A}{(s+3)^3}$, usando variable separable o factor integrante.
2 ptos	**Aplicar** transformada de Laplace inversa y obtener una solución no trivial del tipo $x(t) = A\frac{t^2}{2}e^{-3t}$.