MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 10)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior...

- Comenzamos el estudio de EDO's **lineales** de orden superior,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

y nos enfocamos en el caso específico de ecuaciones de 2do orden:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

- **Teorema de existencia y unicidad**: la continuidad de p, q, f garantiza la existencia de una única solución al PVI:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

- Decimos que una EDO lineal es **homogénea** si $f(x) = 0$, es decir

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

- Las ecuaciones homoéneas satisfacen el **principio de superposición**:

$$y_1, y_2 \text{ soluciones} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{combinación lineal}} \text{ es solución } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

¿Cómo resolvemos un PVI para una ecuación homoénea?

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

Idea: Dadas dos soluciones a la ecuación homogénea, y_1, y_2, buscamos una solución al PVI de la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Esto significa que $y(x)$ debe satisfacer las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(a) = & c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) & = b_0 \\ y'(a) = & c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) & = b_1 \end{cases}$$

Obs. Para tener esperanza de que logremos encontrar una solución como la anterior, necesitamos que y_1, y_2 sean lo suficientemente distintas, o independientes.

Nos gustaría saber bajo que condiciones sobre y_1, y_2, el sistema de ecuaciones tiene solución.

Def. Decimos que y_1, y_2 son funciones **linealmente independientes (l.i.)** en un intervalo abierto $\mathcal{I}$ si ninguna de ellas es un múltiplo de la otra.

Def. En caso contrario, es decir, si $y_1(x) = cy_2(x)$ para todo $x \in \mathcal{I}$, decimos que son **linealmente dependientes (l.d.)**.

De manera equivalente, y_1, y_2 son l.d. si existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{I}.$$

Ejemplos: son pares de funciones l.i.

$$\text{sen}(x) \text{ y } \cos(x); \quad e^x \text{ y } e^{-2x}; \quad e^x \text{ y } xe^x; \quad x+1 \text{ y } x^2; \quad \text{etc.}$$

Obs. La importancia de la definición anterior es que:

si y_1, y_2 son l.i. en $\mathcal{I} \Rightarrow$ El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= b_0 \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) &= b_1 \end{cases}$$

se puede resolver
(volveremos a esto la siguiente clase).

Generalizamos los conceptos anteriores a EDO's lineales de orden $n \geq 2$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

Teorema. [Existencia y unicidad para EDO's lineales]
Sean $p_1, \ldots, p_n, f$ funciones continuas en un intervalo abierto $\mathcal{I}$ tal que $a \in \mathcal{I}$. Para cualquier $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, el PVI de orden n

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \\ y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases}$$

tiene solución única en todo el intervalo $\mathcal{I}$.

Decimos que una EDO lineal de orden n es **homogénea** si $f(x) = 0$, es decir,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Teorema. [**Principio de superposición para ec's homogéneas**]
Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la EDO lineal homogénea en un intervalo abierto $\mathcal{I}$, entonces toda combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \quad (\text{con } c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$$

es también una solución de la ecuación en $\mathcal{I}$.

Para buscar soluciones al PVI homogéneo de orden n

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \\ y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases}$$

repetimos el mismo procedimiento que utilizamos para ecuaciones de segundo orden.

Dadas n soluciones a la ecuación homogénea $(y_1, \ldots, y_n)$, buscamos una solución de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

tal que $y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$.

Lo anterior equivale a resolver un sistema de ecuaciones de $n \times n$.

Para lograr encontrar la solución, necesitamos que las funciones $y_1, \ldots, y_n$ sean suficientemente distintas, o independientes

Def. Decimos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones **linealmente dependientes (l.d.)** en un intervalo abierto $\mathcal{I}$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas cero, tales que.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{I}$$

Obs. Otra forma de decir lo anterior es que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son l.d. si y sólo si una de ellas se puede escribir como combinación lineal del resto.

Ejemplo.
$f_1(x) = \operatorname{sen}(2x),\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = 3e^x + \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ son l.d.

Def. Decimos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son **linealmente independientes (l.i.)** si no son l.d.

Obs. De manera equivalente podemos decir que $f_1, \ldots, f_n$ son l.i. en $\mathcal{I}$ si

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Repaso - Interrogación 1

El tema principal de la I1 son las EDO's de primer orden.

1) Definiciones generales

- EDO de 1er orden: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- Problema de valor inicial: $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$
- Solución: función $y(x)$ que satisface la EDO (o el PVI) en un dominio específico
- Tipos de soluciones:

  •General •Particular •Singular • Implícita •Explícita

2) Tipos de EDO de 1er orden y métodos de resolución

- **Variable separable** - método de separación de variables

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

- **Lineal** - método del factor integrante

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad e^{\int P(x)dx} \quad (f.i.)$$

$$\Rightarrow \quad \left(y \cdot e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

- **Ecuaciones resolubles por sustitución**

  Método:

  • Identificar el tipo de ecuación y su sustitución
  • Derivar la sustitución
  • Utilizar la sustitución y su derivada para encontrar la EDO simplificada (lineal o de variable separable)
  • Resolver la EDO simplificada
  • Volver a la variable original

Nombre	EDO	Sustitución
	$y' = F(ax + by + c)$	$v = ax + by + c$
Homogéneas	$y' = F(\frac{y}{x})$	$v = y/x$
Bernoulli	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$v = y^{1-n}$
Riccati	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$	$y = y_1 + \frac{1}{v}$

- **Ecuaciones exactas**

  Criterio de exactitud:

  $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{exacta} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_y M(x,y) = \partial_x N(x,y)$$

  Método de resolución: el objetivo es encontrar $F(x,y)$ tal que

  $$M(x,y) = \partial_x F(x,y), \quad N(x,y) = \partial_y F(x,y).$$

  Luego la solución general implícita es: $F(x,y) = C$

  Opción 1:
  Integrar $M(x,y)$ con respecto a x, derivar con respecto a y, e igualar a $N(x,y)$.

  Opción 2:
  Integrar $N(x,y)$ con respecto a y, derivar con respecto a x, e igualar a $M(x,y)$.

  Consejo: elegir la opción donde la integración sea más sencilla

- **Ecuaciones de 2do orden reducibles**
  - $F(x, y', y'') = 0 \quad \rightarrow \quad$ **Sustitución:** $\quad p = y', \quad p' = y''$

    $$\Rightarrow \quad F(x, p, p') = 0$$

    (EDO de 1er orden para p con variable independiente x)

  - $F(y, y', y'') = 0 \quad \rightarrow \quad$ **Sustitución:** $\quad p = y', \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$

    $$\Rightarrow \quad F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$$

    (EDO de 1er orden para p con variable independiente y)

3) Modelos de crecimiento poblacional y análisis cualitativo

Modelo general: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta(t) - \delta(t))P$

$\beta(t) =$ tasa de nacimientos $\left[\dfrac{n^\circ \text{ de nacimientos}}{\text{unidad de pobl.} \times \text{unidad tpo.}}\right]$

$\delta(t) =$ tasa de muertes $\left[\dfrac{n^\circ \text{ de muertes}}{\text{unidad de pobl.} \times \text{unidad tpo.}}\right]$

Modelos específicos:

- Modelo de crecimiento natural $\rightarrow \quad \dfrac{dP}{dt} = kP$
- Modelo logístico $\rightarrow \quad \dfrac{dP}{dt} = k(M - P)P$
- Modelo explosión/extinción $\rightarrow \quad \dfrac{dP}{dt} = k(P - M)P$

Los modelos logístico y explosión/extinción son EDO'ds no lineales, de variable separable, de Bernoulli, y de Riccati.

Ajuste de parámetros: datos $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$, $P(x_3) = p_3$ nos permiten encontrar las constantes k, M y P_0 (cond. inicial).