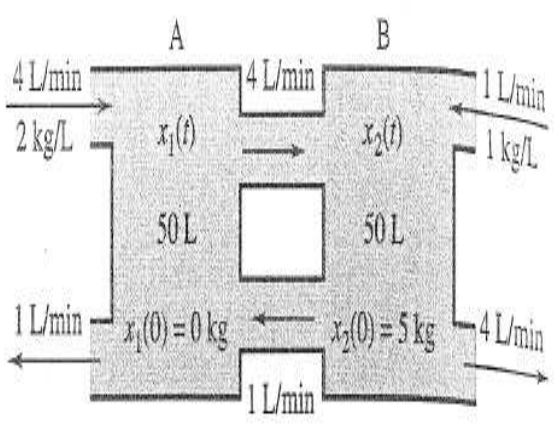
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
26 de enero de 2012

MAT 640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 3

1. **[8 ptos.]**

Dos estanques, conteniendo 50 litros de salmuera cada uno, están conectados entre sí mediante tubos que hacen que el líquido pase del estanque A al estanque B a razón de 4 litros por minuto y del estanque B al estanque A a razón de 1 litro por minuto. Las mezclas dentro de cada estanque se mantienen homogéneas. Salmuera, con una concentración de 2 Kg/litro de sal entra al estanque A a razón de 4 litros por minuto y una mezcla conteniendo 1 Kg/litro de sal entra al estanque A a razón de 1 litro por minuto.



Las mezclas salen del sistema por ambos estanques, del estanque A a 1 litro por minuto y del estanque B a 4 litros por minuto, Si en un principio el estanque A contiene agua pura y el estanque B contiene 5 Kg de sal, determine la cantidad de sal en cada estanque después de t minutos e indique a cuánto tiende la cantidad de sal en cada estanque cuando $t \to \infty$.

Respuesta : Sean $x(t)$ e $y(t)$ las cantidades de sal (en Kgs) que hay en los estanques A y B, respectivamente, después de t minutos.

Entonces las funciones $x(t)$, $y(t)$ satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{5}{50}\,x + \tfrac{1}{50}\,y + 8 \\ y' &= \tfrac{4}{50}\,x - \tfrac{5}{50}\,y + 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,' = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{5}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{5}{50} \end{bmatrix}}_{A} \vec{x} + \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -\dfrac{7}{50}$; $\lambda_1 = -\dfrac{3}{50}$ con vectores propios

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{respectivamente.}$$

Por tanto, una matriz fundamental para el sistema es

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-7t/50} & e^{-3t/50} \\ -2e^{-7t/50} & 2e^{-3t/50} \end{bmatrix},$$

y la solución general de la ecuación viene dada por

$$\vec{X}\,(t) \;=\; \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\,\vec{c} \;+\; \mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\,\vec{f}\,(s)\,ds,$$

donde $\vec{f}\,(t) \;=\; \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{c} \;=\; \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ es un vector de constantes que dependen de los valores iniciales

Tenemos que

$$\mathbf{\Phi}(s)^{-1} \;=\; \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2e^{7s/50} & -e^{7s/50} \\ 2e^{3s/50} & e^{3s/50} \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\,\vec{f}\,(s) \;=\; \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 15e^{7s/50} \\ 17e^{3s/50} \end{bmatrix}$$

y por tanto,

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\,\vec{f}\,(s)\,ds \;=\; \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{750}{7}e^{7t/50} \\ \\ \frac{850}{3}e^{3t/50} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_1} - \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{750}{7} \\ \\ \frac{850}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_2}.$$

Por otro lado,

$$\mathbf{\Phi}(0)^{-1} \;=\; \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1}\,\vec{c},= \;\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2C_1 - C2 \\ 2C_1 + C_2 \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{C}$$

de modo que la solución del sistema es

$$\vec{X}\,(t) \;=\; \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{C} \;+\; \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{X}_2 \;+\; \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{X}_1$$

y, como $\mathbf{C}$ y $\mathbf{X}_2$ son matrices numéricas y como

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Phi}(0) \;=\; \mathbf{0}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) \;&=\; \lim_{t\to\infty} \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{X}_1 \\ &=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-7t/50} & e^{-3t/50} \\ -2e^{-7t/50} & 2e^{-3t/50} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{750}{7}e^{7t/50} \\ \\ \frac{850}{3}e^{3t/50} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) \;&=\; \frac{1}{4}\left(\frac{750}{7} + \frac{850}{3}\right) \;=\; \frac{2050}{21}\;Kg \\ \lim_{t\to\infty} y(t) \;&=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{750}{7} + \frac{850}{3}\right) \;=\; \frac{1850}{21}\;Kg \end{aligned}$$

2. **[8 ptos.]** Determinar la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ siendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Respuesta : El polinomio carcaterístico de la matriz A es:

$$p(x) = \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{bmatrix} = (3-x)(x-1)^2$$

de donde sus valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad (algebraica) dos.

A λ_1 le corresponde el vector propio $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ generando la solución $\vec{x_1} = e^{3t}v_1$.

Para λ_2 sólo obtenemos un vector propio: $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, generando la solución $\vec{x_2} = e^t\vec{v_2}$.

Necesitamos una segunda solución $\vec{v_3}$, asociada a λ_2.

Buscamos del tipo $\vec{v_3} = e^t[\vec{u} + t\vec{v_2}]$, donde $\vec{u}$ satisface

$$(A-I)\vec{u} = \vec{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

y podemos elegir $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, generando la solución $\vec{x_3} = e^t[\vec{u} + t\vec{v_2}]$.

De este modo hemos generado la matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{x_1}(t) & \vec{x_2}(t) & \vec{x_3}(t) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Entonces, como e^{At} es también matriz fundamental, existe matriz numérica C tal que $e^{At} = \mathbf{\Phi}(t)\,C$, donde $C = \mathbf{\Phi}(t)^{-1}$. Luego

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lego, finalmente,

$$e^{At} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4e^t & 0 & 0 \\ 2e^{3t}-2e^t & 4e^{3t} & 0 \\ e^{3t}-e^t-2te^t & 2e^{3t}-2e^t & 4e^t \end{bmatrix}$$

3. [**4 ptos.**] Dado el sistema no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2x - x^2 - xy \\ \dfrac{dy}{dt} &= 3y - y^2 - 2xy \end{cases}$$

se pide hallar todos sus puntos de equilibrio y hallar la linealización del sistema alrededor de P, su único punto de equilibrio cuyas dos componentes son distintas de cero. Determine además el carácter (en términos de su estabilidad) de P si ello es posible o indique por qué no, si ello resultara imposible.

Solución: Sean $F(x,y) = 2x - x^2 - xy$ y $G(x,y) = 3y - y^2 - 2xy$.

Los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema $F(x,y) = G(x,y) = 0$ los que resultan ser

$$P1 = (0,0); \qquad P2 = (2,0); \qquad P3 = (0,3); \qquad P4 = (1,1).$$

Luego, debemos linealizar alrededor de $P4$. La matriz de linealización es

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x-y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A = J(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

y la linealización pedida es el sistema lineal

$$\vec{x}\,' = A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x},$$

Los valores propios de A son $\qquad \lambda_1 = -1 - \sqrt{2}; \qquad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$

Como $\lambda_2 > 0$, el *teorema de Hartman–Grobman* nos dice que el punto de equilibrio $P4$ **es inestable**.

4. [**4 ptos.**] Dado el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -2y+1 \\ \dfrac{dy}{dt} &= 3x^2-2x-1 \end{cases},$$

demuestre que es hamiltoniano y encuentre una función hamiltoniana $H(x,y)$ para el sistema. Finalmente use $H(x,y)$ para clasificar la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio del sistema.

Solución: Sean $F(x,y) = -2y+1$ y $G(x,y) = 3x^2-2x-1$.

Como $F_x = -G_y = 0$, el sistema es hamiltoniano.

Si $H(x,y)$ es la función hamiltonian buscada, se tendrá que

$$H_x = 3x^2-2x-1 \qquad \text{y} \qquad H_y = 2y-1.$$

De allí obtenemos que

$$H(x,y) = x^3-x^2-x+y^2-y.$$

Los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema $F(x,y) = G(x,y) = 0$ los que resultan ser

$$P1 = (-1/3,\, 1/2); \qquad P2 = (1,\, 1/2).$$

La matriz hessiana de $H(x,y)$ es

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6x-2 & 0 \end{bmatrix}$$

con determinante

$$\Delta(x,y) = 4(3x-1)$$

Entonces,

$$\Delta(P_1) = -8 < 0 \qquad P_1 \quad \Rightarrow \quad \text{es punto de silla de } H(x,y)$$

y por tanto el **punto de equlibrio $\mathbf{P}_1$ es inestable**.

Por otro lado,

$$\Delta(P_2) = 8 > 0 \qquad P_1 \quad \Rightarrow \quad \text{es punto de máximo o mínimo de } H(x,y)$$

y por tanto el **punto de equlibrio $\mathbf{P}_2$ es estable**.