MAT1640, semestre 2021/2

Examen final, 15.12.2021, tiempo: 2 horas

Profesores Alejandro Ramirez & Christian Sadel

Cada Problema teine 6 puntos, el examen en total tiene 24 puntos.
Nota = 1+ Puntaje / 4

Problema 1. Resuelve el siguiente problema de valores iniciales para la función $y = y(t)$,

$$y'' - y' - 6y = -5e^{3t} \qquad y(0) = 3, \;\; y'(0) = 3 \, .$$

Solucion:
Metodo 1: Transformada de Laplace

$Y = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $y' = sY - 3$, $y'' = s^2Y - 3s - 3$. (1 pt.)

$$s^2Y - 3s - 3 - (sY - 3) - 6Y = \frac{-5}{s-3} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s^2 - s - 6) = \frac{-5}{s-3} + 3s \quad \text{(1 pt.)}$$

Se nota $s^2 - s - 6 = (s-3)(s+2)$, Asi.

$$Y = \frac{-5 + 3s(s-3)}{(s-3)^2(s+2)} = \frac{a}{(s-3)} + \frac{b}{(s-3)^2} + \frac{c}{s+2} \, . \quad \text{(1 pt.)}$$

Y se obtiene

$$-5 + 3s(s-3) = a(s-3)(s+2) + b(s+2) + c(s-3)^2 \, .$$

Usando $s = 3$ se obtiene $-5 = 5b \;\; \Rightarrow \;\; b = -1$.

Usando $s = -2$ se obtiene $25 = 25c \;\; \Rightarrow \;\; c = 1$.

Para la ultima constante usamos por ejemplo $s = 0$ y se obtiene
$-5 = -6a + 2b + 9c = -6a - 2 + 9 \;\; \Rightarrow \;\; 6a = 12 \;\; \Rightarrow \;\; a = 2$.
(2 pt.)

Asi se tiene

$$y(t) = ae^{3t} + bte^{3t} + ce^{-2t} = 2e^{3t} - te^{3t} + e^{-2t} \, . \quad \text{(1 pt.)}$$

Metodo 2: Solución general inhomogenea + obtener constantes

El polinomio caracteristico es $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2)$, las soluciones homogeneas son e^{3t} y e^{-2t}. (1 pt.) Como aparece e^{3t} se necesita usar $y_p = cte^{3t}$ para la solucion particular: (1 pt.)

$$-5e^{3t} = y_p'' - y_p - 6y_p = c\left(6e^{3t} + 9te^{3t} - (e^{3t} + 3te^{3t}) - 6te^{3t}\right) = c5e^{3t}$$

y tenemos $c = -1$, $y_p = -te^{3t}$. (1 pt.)

La solucion general de ecuación inhomogenea es

$$y = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} - te^{3t} \quad \text{(1 pt.)}$$

Con $3 = y(0) = c_1 + c_2 = 3$, y $3 = y'(0) = 3c_1 - 2c_2 - 1$ se obtiene $c_1 = 2, c_2 = 1$. Y la solución es:

$$y(t) = 2e^{3t} - e^{-2t} - te^{3t}\ .$$

Problema 2. Obtiene la solución general de

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

El polinomio caracteristico es $r^2-4r+5 = (r-2)^2+1 = (r-2-i)(r+2+i)$. Los auto-valores son $2 \pm i$. (1 pt.)

Para $r = 2+i$ se obtiene para el vector propio $(-3-i \quad -5)\vec{v} = 0$, por ejemplo $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \end{pmatrix}$. (1 pt.).

Se nota: para $r = -2-i$ tenemos $\begin{pmatrix} 5 \\ -3+i \end{pmatrix}$.

Una base de soluciones de ecuación homogénea son

$$\mathrm{Re}\left(e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t))\begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\cos(t)\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{2t}\sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{Im}\left(e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t))\begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\sin(t)\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1 pt.).

Par una solución particular se puede usar $\vec{x}_p = \vec{c}$ y obtener

$$\vec{x}_p\,' = \vec{0} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\vec{c} + \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

o

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(2 pt.)}$$

La solucion es

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 pt.) .

Problema 3.

Un estanque tiene inicialmente 10 litros de agua pura. Por un tubo entra agua salada a una tasa de 1 litro por minuto. El agua salada que entra tiene una concentración de 200 gramos de sal por litro. Por otra parte, hay otro tubo por donde sale agua a una tasa de 2 litros por minutos del estanque. Calcule la cantidad de sal como función del tiempo que hay en el estanque.

Solución:

Usamos t en minutos, el volumen de agua en el tanque es $V(t) = 10 - t$, (efectivamente se pierde un litro por minuto). Eso es para $0 \leq t \leq 10$, despues el tanque es vacío, y todo agua que entra sale altiro, y asi tampoco se queda sal en el tanque.
Sea $Q(t)$ monto de sal en el tanque en gramos.
Taza que entra: $200\,\mathrm{g/l} \cdot 1\,\mathrm{l/min} = 200\,\mathrm{g/min}$
Taza que sale: $Q(t)/V(t)\ \mathrm{g/l} \cdot 2\,\mathrm{l/min} = \frac{2Q}{10-t}$, $(0 \leq t < 10)$. Así:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 200 - \frac{2Q}{10-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{2Q}{10-t} = 200 \quad \text{con} \quad Q(0) = 0$$

(como tenemos agua puro al inicio). (2 pt.)

Factor integrante: $\exp(\int 2/(10-t)) = \exp(-\ln((10-t)^2)) = (10-t)^{-2}$.
Se obtiene

$$\frac{Q'}{(10-t)^2} + \frac{2Q}{(10-t)^3} = \frac{200}{(10-t)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{Q}{(10-t)^2} \right)' = \frac{200}{(10-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Q}{(10-t)^2} = \frac{200}{10-t} + C \quad \Leftrightarrow \quad Q(t) = (10-t)(200 + C(10-t)) \text{ (2 pt.)}$$

Por la condición inicial:

$$0 = Q(0) \quad \Rightarrow \quad 10C = -200 \quad \Rightarrow \quad C = -20 \quad \text{(1 pt.)}$$

Y tenemos $Q(t) = 20t(10-t)$ para $0 \leq t < 10$; $Q(t) = 0$ para $t \geq 10$. (1 pt.)

Problema 4.
Obtiene la solución general implicita de

$$\left(x^2e^{xy} - 10x^3y^4 - \cos(2y)\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1+xy)e^{xy} - 6x^2y^5 + x^2 \;=\; 0\,.$$

Solución

En la forma $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ se nota

$$M_y = \partial_y\left((1+xy)e^{xy} - 6x^2y^5 + x^2\right) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} - 30x^2y^4$$
$$N_x = \partial_x\left(x^2e^{xy} - 10x^3y^4 - \cos(2y)\right) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} - 30x^2y^4$$

Asi, $M_y = N_x$ y la ecuación es exacta! (1 pt.)

Resolviendo $\partial_y\Psi(x,y) = N = x^2e^{xy} - 10x^3y^4 - \cos(2y)$ se obtiene

$$\Psi(x,y) = xe^{xy} - 2x^3y^5 - \frac{1}{2}\sin(2y) + h(x) \quad \text{(2 pt.)}$$

Usando en $\partial_x\Psi(x,y) = M$ se obtiene

$$e^{xy} + xye^{xy} - 6x^2y^5 + h'(x) = (1+xy)e^{xy} - 6x^2y^5 + x^2$$

y por eso, $h'(x) = x^2$, por ejemplo $h(x) = \frac{1}{3}x^3$. (2 pt.)
La solucieon general es:

$$xe^{xy} - 2x^3y^5 - \frac{1}{2}\sin(2y) + \frac{1}{3}x^3 \;=\; C\,. \quad \text{(1 pt.)}$$