P4

Considere el sistema $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}$

Encuentre la solución con condición inicial $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puede usar que $e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -e^{-t} + 7e^{5t} & 7e^{-t} - 7e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & 7e^{-t} - e^{5t} \end{pmatrix}$

Solución por variación de parámetros

$x_p = e^{At}\int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)\,ds$ ← 0,3 puntos por fórmula correcta (0,2 punto si la fórmula no satisface la condición inicial, es decir, si no se especifica que la integral parte de 0)

$e^{-As} = \frac{1}{\det(e^{At})}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7e^{-t} - e^{5t} & -7e^{-t} + 7e^{5t} \\ e^{-t} - e^{5t} & -e^{-t} + 7e^{5t} \end{pmatrix}$ ← 0,3 puntos por la inversa de e^{At}

$\det(e^{At}) = \frac{1}{36}\left[(-7e^{-2t} + e^{4t} + 49e^{4t} - 7e^{10t}) - (-7e^{-2t} + 7e^{4t} + 7e^{4t} - 7e^{10t})\right] = \frac{1}{36}\,36\,e^{4t} = e^{4t}$

$e^{-As}\vec{f}(s) = \frac{e^{-4t}}{6}\cdot 30\begin{pmatrix} 14e^{-t} - 2e^{5t} - 21e^{-t} + 21e^{5t} \\ 2e^{-t} - 2e^{5t} - 3e^{-t} + 21e^{5t} \end{pmatrix} = 5e^{-4t}\begin{pmatrix} -7e^{-t} + 19e^{5t} \\ -e^{-t} + 19e^{5t} \end{pmatrix}$

$= 5\begin{pmatrix} -7e^{-5t} + 19e^{t} \\ -e^{-5t} + 19e^{t} \end{pmatrix}$ $\int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)\,ds = \begin{pmatrix} 7e^{-5t} + 95e^{t} - 102 \\ e^{-5t} + 95e^{t} - 96 \end{pmatrix}$

0,3 punto por $\int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)\,ds$

$$x_p = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\,\vec{f}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -e^{-t}+7e^{5t} & 7e^{-t}-7e^{5t} \\ -e^{-t}+e^{5t} & 7e^{-t}-e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7e^{-5t}+95e^{t}-102 \\ e^{-5t}+95e^{t}-96\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+7e^{6t} & 7-7e^{6t} \\ -1+e^{6t} & 7-e^{6t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7e^{-6t}+95 \\ e^{-6t}+95\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -e^{-t}+7e^{5t} & 7e^{-t}-7e^{5t} \\ -e^{-t}+e^{5t} & 7e^{-t}-e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -102 \\ -96\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7e^{-6t}-95+99+665e^{6t}+7e^{-6t}+665-7-665e^{6t} \\ -7e^{-6t}-95+7+95e^{6t}+7e^{-6t}+665-1-95e^{6t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17e^{-t}-119e^{5t}-112e^{-t}+112e^{5t} \\ 17e^{-t}-17e^{5t}-112e^{-t}+16e^{5t}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 102 \\ 96\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -95e^{-t}-7e^{5t} \\ -95e^{-t}-e^{5t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102-95e^{-t}-7e^{5t} \\ 96-95e^{-t}-e^{5t}\end{pmatrix}$$

← 0,3 punto por resultado

Solución por coeficientes indeterminados

Como la matriz exponencial es una matriz fundamental, la solución general de lo homogéneo es $e^{At}\vec{c}$

Nuestro candidato de solución particular es $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ (un vector constante)

$A\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6A-7B \\ A-2B \end{pmatrix}$ y $\vec{x}_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Llegamos al sistema

$\left.\begin{array}{l} 6A-7B+60=0 \\ A-2B+90=0 \end{array}\right\}$ $5B-480=0 \Rightarrow B=96 \Rightarrow A=102$ ← 0,4 puntos por el particular

la solución general de la no homogeneo es $e^{At}\vec{c} + \begin{pmatrix} 102 \\ 96 \end{pmatrix}$ ← 0,2 puntos por el general

reemplazando la condición inicial $e^{A\cdot 0}\vec{c} + \begin{pmatrix} 102 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I\vec{c} + \begin{pmatrix} 102 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1+102 \\ c_2+96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -102 \\ -96 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = e^{At}\begin{pmatrix} -102 \\ -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 102 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 - 95e^{-t} - 7e^{5t} \\ 96 - 95e^{-t} - e^{5t} \end{pmatrix}$ ← 0,6 puntos por el buscado

$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x^2 - y \end{cases}$ (P5)

puntos críticos. $x = y = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$; $y = 0, 1$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $(x_0, y_0) = (1,1)$

0,2 puntos por los puntos críticos, 0,1 por cada uno

jacobiano $J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$ 0,2 ptos por el jacobiano

pto crítico (0,0): $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, el sistema es casi-lineal

0,2 por identificar tipos

valores propios $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$. $\lambda = 1, -1$, punto silla

0,2 por valores propios de $J(0,0)$

pto crítico (1,1): $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

valores propios $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = -(1-\lambda^2) + 2 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

0,2 por valores propios de $J(1,1)$

Centro o espiral, estable o inestable

0,2 por identificar posibles tipos