**Pontificia Universidad Católica de Chile**
**Facultad de Matemáticas**
**7 de mayo de 2012**

## MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales - Interrogación N° 2

1. Consideremos la ecuación autónoma $y' = y + ay^3$ con la condición inicial $y(0) = b$ (donde $a$ y $b$ pertenecen a $\mathbb{R}$).

   a) Para cada $a \in \mathbb{R}$ fijo encuentre los puntos de equilibrio y clasifíquelos como sumideros, fuentes, o nodos (o estables, inestables, o semiestables).

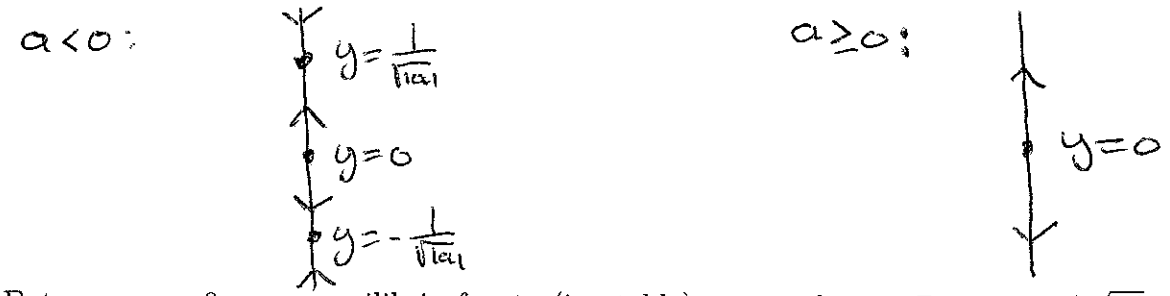
   b) Encuentre todos los valores de $a$ y $b$ para cuáles la solución $y(t)$ permanece acotada para todo $t \in \mathbb{R}$.

*SOLUCIÓN:* a) Las raices reales de la ecuación $y + ay^3 = y(1 + ay^2) = 0$ son:

$$\begin{cases} y = 0 & \text{si } a \geq 0, \\ y = 0,\ y = 1/\sqrt{|a|},\ y = -1/\sqrt{|a|} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio de $y' = y + ay^3$ son entonces: $y = 0$ si $a \geq 0$ y $y = 0$, $y = 1/\sqrt{|a|}$ y $y = -1/\sqrt{|a|}$ si $a < 0$. **[1pt]**

El diagrama de fase es de la forma: **[1pt]**




Entonces $y = 0$ es un equilibrio fuente (inestable) para todo $a \in \mathbb{R}$ y $y = 1/\sqrt{|a|}$ y $y = -1/\sqrt{|a|}$ son equilibrios sumideros (estables) para $a < 0$. **[1pt]**

b) Del diagrama de fase se observa que para $a \geq 0$: $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$ si $b \neq 0$, entonces la única solución acotada es en este caso la solución constante $y = 0$ que corresponde al valor inicial $b = 0$. **[1pt]** Al otro lado, para $a < 0$: $\lim_{t\to-\infty} |y(t)| = +\infty$ si $|b| > 1/\sqrt{|a|}$ mientras si $0 < |b| < 1/\sqrt{|a|}$: $\lim_{t\to-\infty} |y(t)| = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 1/\sqrt{|a|}$. Entonces, para $a < 0$ las soluciones acotadas corresponden a los valores iniciales $b$ perteneciendo al intervalo $-1/\sqrt{|a|} \leq b \leq 1/\sqrt{|a|}$. **[2pt]**

2. Consideremos la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln(x)$ para $x > 0$.

   a) Verifique que la ecuación homogénea tiene dos soluciones independientes de la forma $y = x^m$ con $m$ entero.

   b) Encuentre una solución (particular) de la ecuación no homogénea.

   c) Resuelve la ecuación no homogénea con con condición inicial $y(1) = 1$ , $y'(1) = 2$.

*SOLUCIÓN:* a) Al sustituir $y = x^m$ (y entonces $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$) en la ecuación homogénea encontramos la ecuación $(m(m-1) - 2m + 2)x^m = 0$. Se satisface la

ecuación cuando $m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0$, es decir $m = 1$ o $m = 2$. Entonces $y_1 = x$ y $y_2 = x^2$ son dos soluciones de la ecuación homogénea. **[1pt]** Como el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0 \quad (\text{para } x > 0),$$

las dos soluciones son independientes. **[1pt]**

b) El método de variación de parametro dice que $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ con

$$v_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{a(x) W(x)} dx, \qquad v_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{a(x) W(x)} dx, \quad \textbf{[0,5pt]}$$

donde $a(x) = x^2$, $f(x) = x^2 \ln(x)$ (y $W(x)$ representa el wronskiano) produce una solución particular de la ecuación no homogénea. Entonces:

$$v_1(x) = -\int \frac{x^4 \ln(x)}{x^4} dx = -\int \ln(x) dx \overset{\text{por parte}}{=} -x\ln(x) + x + C_1 \overset{C_1=0}{=} x - x\ln(x) \quad \textbf{[0,5pt]}$$

y

$$v_2(x) = \int \frac{x^3 \ln(x)}{x^4} dx = \int \frac{\ln(x)}{x} dx \overset{u=\ln(x)}{=} \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C_2 \overset{C_2=0}{=} \frac{1}{2}\ln^2(x), \quad \textbf{[0,5pt]}$$

(donde elegimos las constantes de integración igual a cero), es decir:

$$y_p(x) = x^2[1 - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x)] \quad \textbf{[0,5pt]}$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea.

c) La solución general de la ecuación no homogénea es $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias: **[0,5pt]**

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + x^2[1 - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x)] \Longrightarrow y(1) = c_1 + c_2 + 1$$

y por lo tanto

$$y' = c_1 + 2c_2 x + x[1 - \ln(x) + \ln^2(x)] \Longrightarrow y'(1) = c_1 + 2c_2 + 1.$$

Las condiciones iniciales $y(1) = 1$ y $y'(1) = 2$ se cumplen cuando

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 + 2c_2 = 1,$$

es decir $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$ **[1pt]**:

$$y(x) = -x + x^2[2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x)]. \quad \textbf{[0,5pt]}$$

3. De una ecuación diferencial lineal de orden 7 de la forma $y^{(7)} + \sum_{j=0}^{6} a_j y^{(j)} = f(x)$ con coeficientes constantes reales $a_j$, $j = 0, \ldots, 6$ se sabe que la ecuación característica (polinomio característico) tiene la raíz 1 con multiplicidad 3 y la raíz $1 + i$ con multiplicidad 2.

   a) Encuentre la solución general de la ecuación homogénea.

   b) Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea con $f(x) = e^{2x} + 2x^2$.

*SOLUCIÓN:* a) Como los coeficientes $a_0, \dots a_6$ son reales las 7 raices de la ecuación característica $m^7 + \sum_{j=0}^{6} a_j m^j = 0$ son (contando con multiplicidad): $m = 1$ (con multiplicidad 3) y $1+i$, $1-i$ (ambas con multiplicidad 2) **[0,5pt]**, es decir la ecuación característica es igual a:

$$(m-1)^3((m-1)^2+1)^2 = 0. \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

La solución general de la ecuación no homogénea es entonces de la forma:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 \cos(x) e^x + c_5 \sin(x) e^x + c_6 x \cos(x) e^x + c_7 x \sin(x) e^x, \quad \textbf{[2pt]}$$

donde $c_1, \dots, c_7$ son constantes arbitrarias.

b) Resolvemos primero la ecuación no homogénea con $f(x) = f_1(x) = e^{2x}$ usando el método de las constantes indeterminadas substituyendo $y = Ae^{2x}$ (ya que 2 no es una raíz de la ecuación característica):

$$y^{(7)} + \sum_{j=0}^{6} a_j y^{(j)} = A\left(2^7 + \sum_{j=0}^{6} a_j 2^j\right) e^{2x} = A(2-1)^3((2-1)^2+1)^2 e^{2x} = 4Ae^{2x} = f_1(x) = e^{2x},$$

entonces $A = 1/4$. **[1pt]** Luego resolvemos la ecuación homogénea con $f(x) = f_2(x) = 2x^2$ usando el método de las constantes indeterminadas substituyendo $y = Bx^2 + Cx + D$ (ya que 0 no es una raíz de la ecuación característica):

$$\begin{aligned} y^{(7)} + \sum_{j=0}^{6} a_j y^{(j)} &= a_0(Bx^2 + Cx + D) + a_1(2Bx + C) + 2a_2 B \\ &= a_0 Bx^2 + (a_0 C + 2a_1 B)x + (a_0 D + a_1 C + 2a_2 B) = f_2(x) = 2x^2. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{cases} a_0 B = 2 \\ a_0 C + 2a_1 B = 0 \\ a_0 D + a_1 C + 2a_2 B = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto $B = 2/a_0$, $C = -4a_1/a_0^2$, $D = 4(a_1^2 - a_0 a_2)/a_0^3$. **[1pt]** La solución general de la ecuación no homogénea con $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es entonces igual a la solución de la parte a) más las dos soluciones particulares con $f(x) = f_1(x)$ y $f(x) = f_2(x)$ (por el principio de superposición):

$$\begin{aligned} y(x) = {} & c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 \cos(x) e^x + c_5 \sin(x) e^x + c_6 x \cos(x) e^x + c_7 x \sin(x) e^x \\ & + Ae^{2x} + Bx^2 + Cx + D, \end{aligned}$$

donde $c_1, \dots, c_7$ son constantes arbitrarias y $A$, $B$, $C$ y $D$ tienen los valores calculados arriba **[1pt]**. De la igualdad $m^7 + \sum_{j=0}^{6} a_j m^j = (m-1)^3((m-1)^2+1)^2$ uno saca que $a_0 = -4$, $a_1 = 20$ y $a_2 = -44$, entonces $B = -1/2$, $C = -5$ y $D = -14$ (y $A = 1/4$).

4. Para un circuito eléctrico la relación entre el voltage $V(t)$ y la corriente $I(t)$ como función del tiempo $t$ es dada por la ecuación diferencial $LI'' + RI' + C^{-1}I = V'$, donde $L = 2$ [henries], $R = 16$ [ohms] y $C = 1/50$ [farads]. Supongamos que el voltaje aplicado es de la forma $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ con $V_0$ y $\omega$ constantes estrictamente positivas.

   a) Determine la solución general de la ecuación.

   b) Verifique que existe una única solución periodica y escriba esta solución explícitamente.

c) Calcule la impedancia del circuito, es decir el cociente de la amplitud de $V(t)$ y $I(t)$ para la solución periódica; y determine el valor de $\omega$ de resonancia, es decir el valor de $\omega$ para el cuál la impedancia alcanza su valor mínimo.

*SOLUCIÓN:* a) La ecuación para $I$ es:

$$2I'' + 16I' + 50I = V_0\omega\cos(\omega t).$$

La ecuación característica es $2m^2 + 16m + 50 = 0 \Longrightarrow m = -4 \pm 3i$, entonces la solución general de la ecuación homogénea es:

$$I_h(t) = c_1e^{-4t}\cos(3t) + c_2e^{-4t}\sin(3t), \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias. Usando el método de constantes indeterminadas buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $I_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (ya que $i\omega$ no es una raíz de la ecuación característica) **[0,5pt]**:

$$-2\omega^2[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] + 16\omega[-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] + 50[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] = V_0\omega\cos(\omega t).$$

Comparando coeficientes de $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ en ambos lados:

$$\begin{cases} (50 - 2\omega^2)A + 16\omega B = V_0\omega \\ (50 - 2\omega^2)B - 16\omega A = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$A = \frac{(50 - 2\omega^2)V_0\omega}{(50 - 2\omega^2)^2 + 16^2\omega^2}, \qquad B = \frac{16V_0\omega^2}{(50 - 2\omega^2)^2 + 16^2\omega^2}. \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$$I = I_h + I_p = c_1e^{-4t}\cos(3t) + c_2e^{-4t}\sin(3t) + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias y $A$ y $B$ tienen los valores calculados arriba.

b) Como $I_p(t)$ es periódica con periodo $2\pi/\omega$ y $I_h(t)$ no es periódica, la solución en parte a) es periódica si y solo si $c_1 = c_2 = 0$ **[1pt]**, es decir la única solución periódica es:

$$I_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \textbf{[1pt]}$$

donde $A$ y $B$ tienen los valores calculados arriba.

c) Escribiendo

$$I_p(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,[\sin(\phi)\cos(\omega t) + \cos(\phi)\sin(\omega t)] = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \phi),$$

donde $\sin(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $\cos(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, vemos que la amplitud de la solución periodica $I_p(t)$ es:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{V_0\omega}{\sqrt{(50 - 2\omega^2)^2 + 16^2\omega^2}}, \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

entonces la impedancia es:

$$\frac{V_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{(50 - 2\omega^2)^2 + 16^2\omega^2} = \sqrt{(\frac{50}{\omega} - 2\omega)^2 + 16^2}. \quad \textbf{[0, 5pt]}$$

El valor mínimo de la impedancia se alcanza cuando $\frac{50}{\omega} = 2\omega$, es decir $\omega = 5$. **[1pt]**