Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2014

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Interrogación 1

Pregunta 1. a) Obtenga la forma general de las soluciones de $\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$.

b) Determine la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 3x^2e^{x^2},$$
$$y(0) = 5.$$

Solución:

a) Esto es una ecuación de Bernoulli con $n = 4/3$, por lo que consideramos el cambio de variable $v = y^{1-4/3} = y^{-1/3}$ o equivalentemente $y = v^{-3}$. Luego

$$\frac{dy}{dx} = -3v^{-4}\frac{dv}{dx}$$

y reemplazando en la ecuación para y obtenemos la siguiente ecuación para v

$$-3v^{-4}\frac{dv}{dx} + \frac{6}{x}v^{-3} = 3v^{-4},$$

multiplicando por v^4 la ecuación queda

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1.$$

Esta ecuación lineal se puede abordar multiplicando por el factor integrante $e^{\int(-2/x)dx} = x^{-2}$, obteniendo la ecuación

$$\begin{aligned} & x^{-2}\frac{dv}{dx} - 2x^{-3}v = -x^{-2} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx}\left(x^{-2}v\right) = -x^{-2} \\ \Leftrightarrow & x^{-2}v = x^{-1} + C \\ \Leftrightarrow & v = x + Cx^2 \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio de variables concluimos que la solución general de la EDO se escribe como

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}$$

b) Esta es una EDO lineal

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2e^{x^2},$$

por lo que multiplicamos por el factor integrante $e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}$ obteniendo la ecuación

$$\begin{aligned} & e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = 3x^2, \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right) = 3x^2, \\ \Leftrightarrow & ye^{-x^2} = x^3 + C, \\ \Leftrightarrow & y(x) = (x^3 + C)e^{x^2}. \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ tenemos $y(0) = C$ y considerando la condición inicial $y(0) = 5$ obtenemos $C = 5$, por lo que la solución al problema de valor inicial es

$$y(x) = (x^3 + 5)e^{x^2}.$$

Pregunta 2. Para la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = 2y^3 - 7y^2 + 4y$$

a) Encuentre las soluciones de equilibrio.

b) Dibuje aproximadamente las curvas solución de la EDO, es decir, bosqueje la trayectoria de la solución $y(t)$ de la EDO que pasa por $(0, y_0)$, para varios valores representativos $y_0 \in \mathbb{R}$.

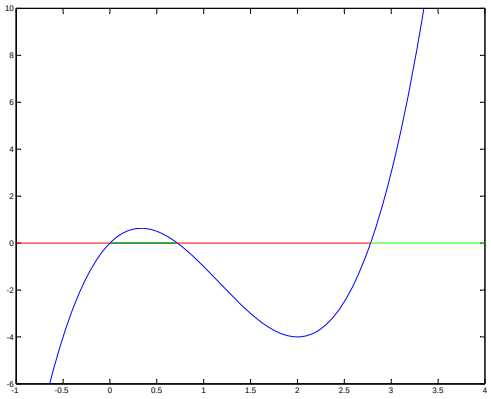
Solución:

a) Las soluciones de equilibrio corresponden a las raíces de la función $f(y) = 2y^3 - 7y^2 + 4y$ y sabemos que

$$\begin{aligned} & 2y^3 - 7y^2 + 4y = 0 \\ \Leftrightarrow & y(2y^2 - 7y + 4) \\ \Leftrightarrow & y = 0 \text{ ó } (2y^2 - 7y + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = 0 \text{ ó } y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 * 2 * 4}}{2 * 2} \end{aligned}$$

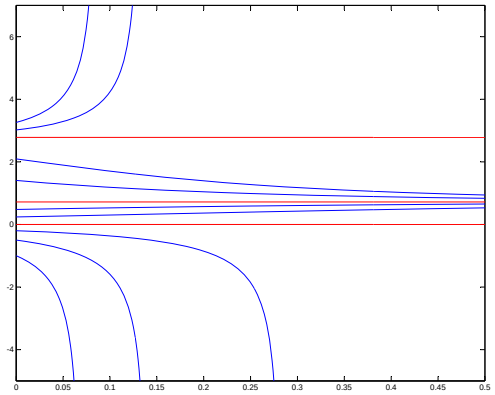
por lo que las soluciones de equilibrio son tres: $y = 0, y = \frac{7-\sqrt{17}}{4}$ e $y = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$.

b) El gráfico de $f(y)$ y diagrama de fase de la ecuación es:



(a) Gráfico de $f(y)$ y diagrama de fase. En los intervalos rojos las soluciones de la ecuación son decrecientes, en los intervalos verdes las soluciónes de la ecuación son crecientes. Los límites de estos intervalos corresponden a las soluciones de equilibrio: 0, $\frac{7-\sqrt{17}}{4}$ y $\frac{7+\sqrt{17}}{4}$.

por lo que podemos concluir que 0 y $\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ son equilibrios inestables, mientras que $\frac{7-\sqrt{17}}{4}$ es un equilibro estable. Con esto podemos bosquejar las curvas solución de la ecuación diferencial como



(b) Curvas solución con condiciones iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ representativas. En rojo están las soluciones de equilibrio

Pregunta 3. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 3\frac{P^2}{t^2} - 2\frac{P}{t}, \qquad t \geq 1,$$

modela el crecimiento de una población $P(t)$ con número de nacimientos $3P/t^2$ y número de muertes $2/t$ por unidad de tiempo y por unidad de población. Resuelva la EDO para condiciones iniciales: $P(1) < 0, P(1) = 0, P(1) \in (0,1), P(1) = 1$ y $P(1) > 1$. De las expresiones obtenidas describa que ocurre con $P(t)$ cuando t crece.

Solución: El lado derecho en esta ecuación diferencial es una función homogénea de grado 0, por lo que consideramos el cambio de variable $v = P/t$ o equivalentemente $P = vt$, luego

$$\frac{dP}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v$$

y reemplazando en la ecuación para P obtenemos la siguiente ecuación para v

$$\begin{aligned} t\frac{dv}{dt} + v &= 3v^2 - 2v, \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{3}{t}v(v-1). \end{aligned}$$

Vemos que el lado derecho en esta ultima ecuación se anula para $v = 0$ y $v = 1$, por lo que si $v(1) = 0$ la solución es constante $v(t) = 0, \forall t \geq 1$. Y si $v(1) = 1$ la solución es constante $v(t) = 1, \forall t \geq 1$. Si $v \neq 0, 1$ podemos resolver esta ecuación por variables separables:

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = \frac{3}{t}v(v-1), \\ \Rightarrow &\int \frac{1}{v(v-1)}dv = \int \frac{3}{t}dt, \\ \Rightarrow &\int \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}\right)dv = \int \frac{3}{t}dt, \\ \Rightarrow &\ln|v-1| - \ln|v| = 3\ln|t| + C, \\ \Rightarrow &\left|\frac{v-1}{v}\right| = Kt^3, \text{ pues } t \geq 1 > 0 \text{ y donde } K = e^C > 0, \end{aligned}$$

y aquí tenemos tres posibles casos.

Caso 1: $v(1) < 0$. Por los signos de $v - 1$ y v la ecuación se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{v-1}{v} &= Kt^3, \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{1-Kt^3}, \end{aligned}$$

evaluando en $t = 1$ obtenemos

$$v(1) = \frac{1}{1-K} \Rightarrow K = \frac{v(1)-1}{v(1)} > 1$$

Caso 2: $v(1) \in (0, 1)$. Por los signos de $v - 1$ y v la ecuación se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{1-v}{v} &= Kt^3, \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{1+Kt^3}, \end{aligned}$$

evaluando en $t = 1$ obtenemos

$$v(1) = \frac{1}{1+K} \Rightarrow K = \frac{1-v(1)}{v(1)} > 0$$

Caso 3: $v(1) > 0$. Por los signos de $v - 1$ y v la ecuación se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{v-1}{v} &= Kt^3, \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{1-Kt^3}, \end{aligned}$$

evaluando en $t = 1$ obtenemos

$$v(1) = \frac{1}{1-K} \Rightarrow K = \frac{v(1)-1}{v(1)} \in (0,1)$$

Como $P(t) = tv(t)$ y por lo tanto $v(1) = P(1)$, deshaciendo el cambio de variable concluimos lo siguiente para $P(t), t \geq 1$:

Si $P(1) < 0$ entonces $P(t) = \dfrac{t}{1-Kt^3}$, con $K > 1$ por lo tanto $P(t) \to 0^-$ cuando $t \to +\infty$.

Si $P(1) = 0$ entonces $P(t) \equiv 0, \forall t \geq 1$, en particular $P(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Si $P(1) \in (0,1)$ entonces $P(t) = \dfrac{t}{1+Kt^3}$, con $K > 0$ por lo tanto $P(t) \to 0^+$ cuando $t \to +\infty$.

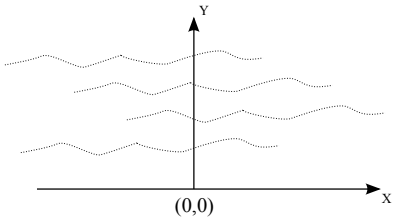
Si $P(1) = 1$ entonces $P(t) = t$, por lo tanto $P(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

Si $P(1) > 1$ entonces $P(t) = \dfrac{t}{1-Kt^3}$, con $K \in (0,1)$ por lo tanto $P(t) \to +\infty$ cuando $t \to (\sqrt[3]{1/K})^-$.

Pregunta 4. Un nadador se encuentra al borde del mar, representado por el eje X en un plano $X - Y$. El nadador incursiona en al agua nadando a partir del origen $(0,0)$ con una velocidad relativa al mar constante igual a V_0 siempre en la dirección perpendicular a la costa. Debido a la marea y a los vientos, la velocidad del mar en el punto (x,y) viene dada por $V(x,y) = (1+x, -y^2)$.

a) Determine la trayectoria $y = y(x)$ que sigue el nadador.

b) ¿Cuánto logra el nadador alejarse de la costa?



Solución:

a) La velocidad del nadador respecto al mar es $(0, V_0)$ y la velocidad del mar es $V(x,y) = (1+x, -y^2)$, luego la velocidad total del nadador respecto al origen es $V_N(x,y) = (1+x, V_0 - y^2)$. La trayectoria del nadador tiene que ser tangente a la velocidad del nadador en cada punto por el que pasa, y por lo tanto la pendiente de $y(x)$ tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_N(x,y)\cdot(0,1)}{V_N(x,y)\cdot(1,0)} = \frac{V_0 - y^2}{1+x}$$
$$y(0) = 0.$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{dy}{V_0 - y^2} = \int \frac{dx}{1+x} \\
&\Rightarrow \int \left(\frac{1}{\sqrt{V_0}+y} + \frac{1}{\sqrt{V_0}-y} \right) dy = \int \frac{2\sqrt{V_0}}{1+x} dx \\
&\Rightarrow \ln|\sqrt{V_0}+y| - \ln|\sqrt{V_0}-y| = 2\sqrt{V_0}\ln|1+x| \\
&\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{V_0}+y}{\sqrt{V_0}-y} \right| = |1+x|^{2\sqrt{V_0}}
\end{aligned}$$

como la condición inicial es $y(0) = 0$, es decir buscamos la trayectoria que pasa por $(0,0)$, buscamos soluciones a la ecuación con $1+x$, $\sqrt{V_0}+y$ y $\sqrt{V_0}-y$ positivos, y la ecuación queda

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{V_0}+y}{\sqrt{V_0}-y} &= (1+x)^{2\sqrt{V_0}} \\
\Rightarrow y(x) &= \sqrt{V_0}\frac{(1+x)^{2\sqrt{V_0}}-1}{(1+x)^{2\sqrt{V_0}}+1},
\end{aligned}$$

además, como la velocidad horizontal del nadador es $(1+x)$ y partimos en $x = 0$ el nadador siempre se despazará hacia la derecha, por lo que la trayectoria del nadador queda descrita por $y(x), x \geq 0$.

b) De la expresión obtenida para $y(x)$ vemos que $y(x) < \sqrt{V_0}, \forall x \geq 0$ y además $y(x) \to \sqrt{V_0}$ cuando $x \to +\infty$. Es decir, lo más que el nadador lograría alejarse de la costa es $\sqrt{V_0}$.