PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I3
Mat1640, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Encuentre la solución del problema con valor inicial:

$$\begin{aligned} x' &= -6x + 5y, \\ y' &= -5x + 2y, \\ x_(0) &= 4 \\ y_(0) &= 5 \end{aligned}$$

Solución :
El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$ y los valores propios son $\lambda_1 = -2 + 3i$, $\lambda_2 = -2 - 3i$.
Vectores propios correspondientes son, por ejemplo,
$v_1 = \begin{pmatrix} 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 4 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$.

La solución general es entonces

$$c_1\ e^{(-2+3i)t} \begin{pmatrix} 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} + c_2\ e^{(-2-3i)t} \begin{pmatrix} 4 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

La condición inicial da

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

de donde la solución pedida es

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}\ e^{(-2+3i)t} \begin{pmatrix} 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\ e^{(-2-3i)t} \begin{pmatrix} 4 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 3\ \mathrm{sen}3t + 4\cos 3t \\ 5\cos 3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Encuentre la solución general de:

$$x' = x - y + 2$$
$$y' = x + 3y$$

Solución :

El polinomio característico para la ecuación homogénea es $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ hay un vector propio , pro ejemplo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Tomamos $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(A - \lambda_1\ I)^2\ v_2 = 0$

Luego, dos soluciones L.I. son:

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - 2I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}$$

Usando coeficientes indeterminados, por ejemplo, una solución particular es,

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solución general es,

$$c_1\ e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\ e^{2t}\begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. *a*) Demostrar que si A es una matriz que satisface $A^2 = 2A$, entonces $e^{At} = I + \frac{(e^{2t}-1)}{2}A$

   b) Encontrar la solución general de

$$\left.\begin{array}{rl} x' = & x + 2y \\ y' = & \frac{1}{2}x + y \end{array}\right\}$$

Solución :

Iterando se obtiene $A^n = 2^{n-1}A$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Usando estas relaciones en la serie de potencias , se obtiene la fórmula.

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

satisface $A^2 = 2A$.

4. Considere el sistema

$$x' = x(1 - x - y)$$
$$y' = y(2 - y - 3x)$$

Encuentre todas sus soluciones de equilibrio $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$. Además, use linealización para estudiar la estabilidad de la solución de equilbrio para la cual $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$.

Solución :

Las soluciones de equilibrio son $(0,0), (0,2), (1,0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La matriz de las derivadas es

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -3y & 2 - 2y - 3x \end{pmatrix}$$

que, evaluada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, es igual a,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Un valor propio es negativo y el otro es positivo. Por lo tanto, la solucón de equlibrio es inestable (punto silla).

Observación :

Los problemas 1. y 2. pueden resolverse también usando por ejemplo la matriz exponencial o una matriz fundamental.

Tiempo: 2 horas