MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales
(Clase 3)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la clase anterior

Cap.1- EDO's de 1er orden $\quad y' = f(x, y)$

- PVI: EDO + Condiciones Iniciales (CI) $y(x_0) = y_0$
  - Teorema de existencia y unicidad de soluciones
- Cálculo de soluciones
  1. Caso general: aproximación por medio de campo de pendientes (o campo de isoclinas) y curvas solución.

     • curva solución: aproximación gráfica a la sol. de una EDO.
  2. Caso más simple: $y' = f(x)$

     Integración directa $\longrightarrow$ $y(x) = \int f(x)dx$ (solución general)

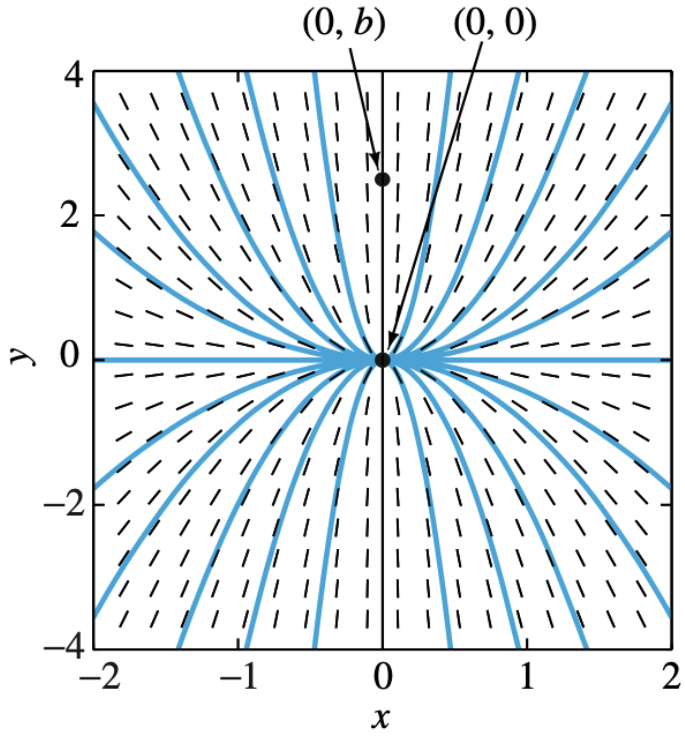
     Obs. Resolución de PVI mediante integración directa:

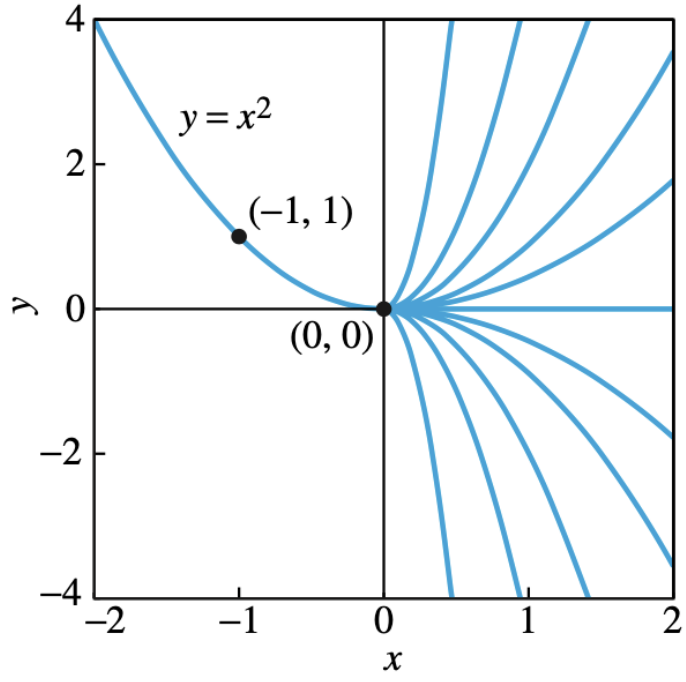
$$y(x) = \underbrace{y_0}_{\text{ctte.}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}_{\text{antiderivada}}$$

Ejemplo de curvas solución

3.a) $\begin{cases} xy' = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3.b) $\begin{cases} xy' = 2y \\ y(-1) = 1 \end{cases}$





Obs. El teorema de exist. y unic. solo garantiza que existe una solución única cerca de la condición inicial.

La existencia y/o unicidad se puede perder al alejarse de la condición inicial

Otro caso particular de EDO de 1er orden

Def. Una EDO de 1er orden $y' = H(x, y)$ es de variable separable si $H(x, y) = g(x)h(y)$

¿Cómo calculamos sus soluciones?

$$y' = g(x)h(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{h(y)}y' = g(x)$$

Si $f(y) = \dfrac{1}{h(y)}$ entonces $f(y(x))y'(x) = g(x)$.

Integrando con respecto a x: $\underbrace{\int f(y(x))y'(x)dx}_{\int f(y)dy} = \int g(x)dx$

(fórmula de cambio de variables)

En la práctica:

1. separar variables.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

2. integramos a ambos lados.

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Si $F(y)$ es antiderivada de $\frac{1}{h(y)}$; $G(x)$ es antiderivada de $g(x)$, entonces

$$\underbrace{F(y) = G(x) + C,}_{y(x) \text{ queda definida de forma implícita}} \qquad C \in \mathbb{R} \quad \text{(solución general)}$$

3. Si es posible, despejar $y(x)$.

Def. Una solución implícita es aquella definida por medio de una igualdad entre x e y (sin derivadas).
Una solución explícita resulta al despejar y en función de x.

Resumen: Tipos de soluciones de una EDO de 1er orden

Obs. Algunas categorías pueden combinarse.

- Solución general: familia de soluciones que depende constantes (una constante para las EDO de 1er orden).
- Solución particular: una solución específica de la EDO (por ejemplo, que satisface un PVI).
- Solución singular: solución particular que no proviene de la solución general.
- Solución implícita: aquella definida por medio de una igualdad $K(x, y) = 0$.
- Solución explícita: si $y(x)$ se escribe fomo función solamente de x.

Ejemplos de resolución de EDO's separables

1.a) $y' = -6xy, \;\; y(0) = 7$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = Ae^{-3x^2}, \;\; A \geq 0}$

sol. general (explícita)

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = 7e^{-3x^2}}$

sol. particular (explícita)

1.b) $y' = -6xy, \;\; y(0) = -4$

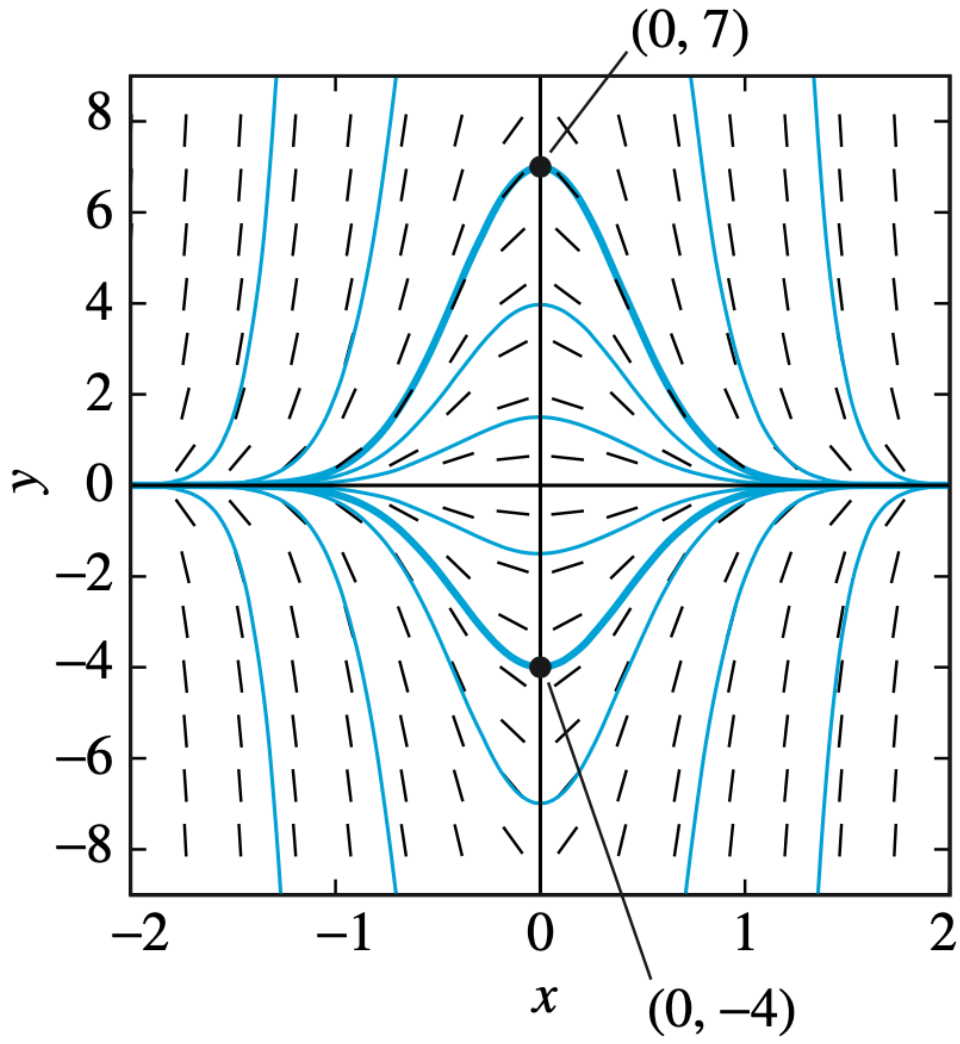
$\longrightarrow$

$\underbrace{y(x) = -Ae^{-3x^2}, \;\; A \geq 0}$

sol. general (explícita)

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = -4e^{-3x^2}}$

sol. particular (explícita)



¿Cómo generar un campo de pendientes a mano?

$\longrightarrow$ Utilizamos las isoclinas

Isoclina: curva en el campo de pendientes donde la pendiente es constante.

Si buscamos resolver $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, los puntos de igual pendiente $C \in \mathbb{R}$ son aquellos que satisfacen ecuación

$$f(x, y) = C \quad \text{(isoclina de pendiente } C\text{)}$$

Casos donde es fácil encontrar isoclinas:

- $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \quad \longrightarrow$ las isoclinas son rectas verticales: puntos (x, y) tales que $f(x) = C$.
- $\dfrac{dy}{dx} = f(y) \quad \longrightarrow$ las isoclinas son rectas horizontales: puntos (x, y) tales que $f(y) = C$.

Volvamos a los ejemplos.

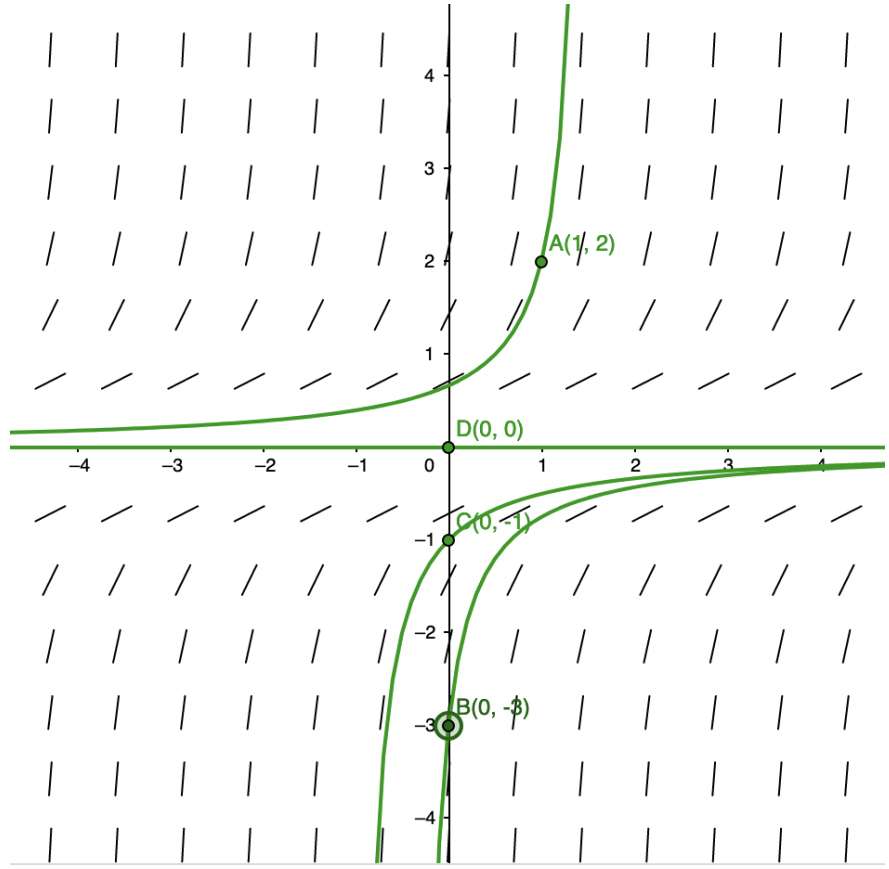
2.a) $\dfrac{dy}{dx} = y^2; \quad y(1) = 2.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = \dfrac{-1}{x + C}, \quad C \in \mathbb{R}}$

sol. general (explícita)

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = \dfrac{1}{\frac{3}{2} - x}}$

sol. particular (explícita)



2.b) $\dfrac{dy}{dx} = y^2; \quad y(0) = 0.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = 0} \qquad \left(\neq \frac{1}{C - x}\right)$

sol. singular (explícita)

3.a) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0; \quad y(0) = 2.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{x^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}}$

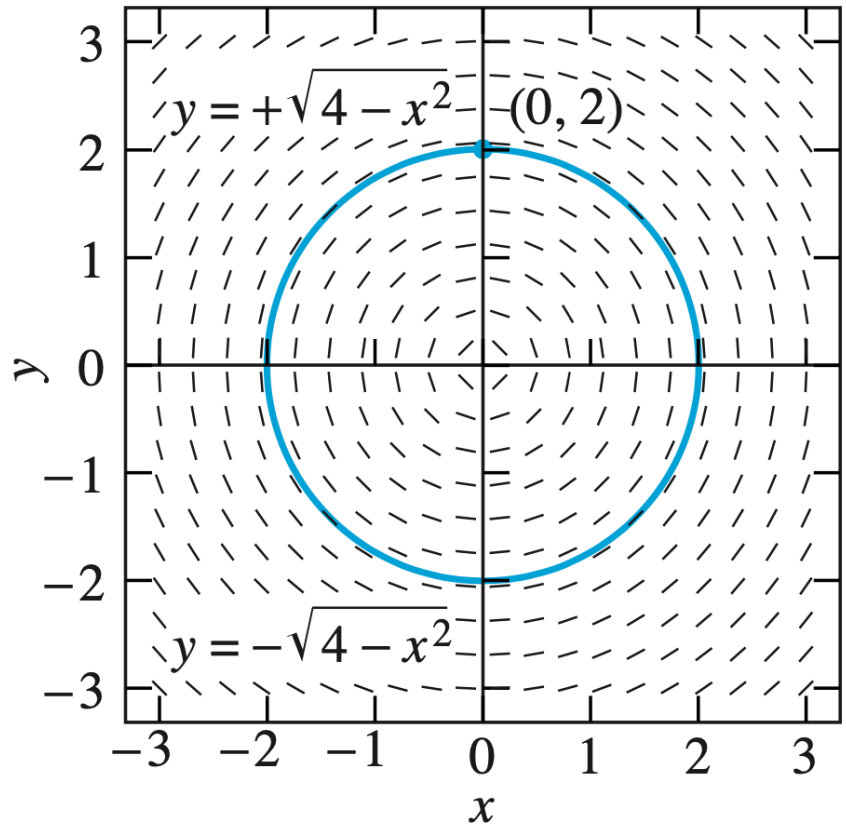
sol. general (implícita)

$\longrightarrow \quad \underbrace{x^2 + y^2 = 4}$

sol. particular (implícita)

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = \sqrt{4 - x^2}}$ en $(-2, 2)$

sol. particular (explícita)



3.b) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0; \quad y(0) = -2.$

$\longrightarrow \quad \underbrace{y(x) = -\sqrt{4 - x^2}}$ en $(-2, 2)$

sol. particular (explícita)