PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Interrogación 1 - MAT1640

Problema 1 [15 pts]
Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI) para una ecuación diferencial reducible de segundo orden:

$$y'' = \frac{3}{2}(y'-1)^{1/3}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = a.$$

Determine un valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el PVI no tiene solución única, y para ese valor, encuentre 2 soluciones.

Problema 2

(a) **[7.5 pts]** Verifique que la siguiente ecuación es exacta y luego encuentre una solución implícita al PVI

$$(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0, \quad y(0) = 0$$

(b) **[7.5 pts]** Encuentre la solución al PVI

$$xy' = 2y + x^3\cos(x), \quad y(2\pi) = 0.$$

Problema 3 [15 pts]
Sea $P(t)$ el tamaño de una población de bacterias al tiempo t. Supongamos que la tasa de natalidad (por unidad de tiempo, por unidad de población) β es igual a $1 - P$ y la tasa de mortandad (por unidad de tiempo, por unidad de población) δ es igual a $2P$. Suponiendo que la población inicial es distinta de 0 ¿Es posible que la población crezca indefinidamente? ¿Es posible que la población se extinga?. ¿Es posible que la población se estabilice a medida que $t \to \infty$? ¿A qué valor?

Problema 4
Determine soluciones generales a las ecuaciónes

(a) **[7.5 pts]** $xy' = e^{-y/x} + y$

(b) **[7.5 pts]** $x^2y' + 2xy = 5y^3$

Tiempo: 2 hrs

Solución problema 1

PVI:

$$y'' = \tfrac{3}{2}(y'-1)^{1/3}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=a.$$

Reducción de orden. Sea $v = y'$. Entonces

$$v' = \tfrac{3}{2}(v-1)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{(v-1)^{1/3}} = \tfrac{3}{2}\,dt.$$

Integrando:

$$\int (v-1)^{-1/3}\,dv = \tfrac{3}{2}\int dt \ \Rightarrow\ \tfrac{3}{2}(v-1)^{2/3} = \tfrac{3}{2}t + C \ \Rightarrow\ (v-1)^{2/3} = t + C_1.$$

Soluciones no constantes:

$$v(t) = 1 \pm (t+C_1)^{3/2}.$$

Además, $v \equiv 1$ es solución de equilibrio (RHS $= 0$). **[5 pts]**

No unicidad. La función $f(x,v) = \tfrac{3}{2}(v-1)^{1/3}$ es continua pero su derivada parcial $\partial_v f(x,v) = \tfrac{1}{2}(v-1)^{-2/3}$ no es continua en $v = 1$. Por tanto, para $a = 1$ el PVI no tiene solución única. **[5 pts]**

Dos soluciones con $a = 1$.

- (i) Tomar $v \equiv 1 \ \Rightarrow y' = 1 \ \Rightarrow y_1(t) = t$ (imponiendo además $y_1(0) = 0$).
- (ii) Tomar $v(t) = 1 + t^{3/2}$ con $t \geq 0$, donde se escoge $C_1 = 0$ debido a que $v(0) = y'(0) = 1$:

$$y_2(t) = \int_0^t \left(1 + s^{3/2}\right) ds = t + \tfrac{2}{5}t^{5/2}, \quad t \geq 0,$$

  y se verifica que $y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$.

Conclusión: el valor buscado es $a = 1$; una pareja de soluciones es

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t + \tfrac{2}{5}t^{5/2}\ (t \geq 0). \quad \textbf{[5pts]}$$

Solución problema 2

Parte (a)

$$(1 + y\,e^{xy})\,dx + (2y + x\,e^{xy})\,dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Exactitud. $M = 1 + ye^{xy},\ N = 2y + xe^{xy}$. Se cumple

$$M_y = e^{xy} + xye^{xy} = N_x,$$

por lo tanto la ecuación es exacta. **[1.5 pts]**

Solución a la ecuación. Integrando M en x:

$$F(x,y) = \int (1 + ye^{xy})\,dx = x + e^{xy} + g(y).$$

$$F_y = xe^{xy} + g'(y) \overset{!}{=} 2y + xe^{xy} \ \Rightarrow\ g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2. \quad \textbf{[3pts]}$$

Solución implícita general: $F(x,y) = C \ \Rightarrow\ x + e^{xy} + y^2 = C.$ **[1 pt]**

Condición inicial: $y(0) = 0$: $0 + e^0 + 0 = 1 = C$.

$$x + e^{xy} + y^2 = 1. \quad \textbf{[2pts]}$$

Parte (b)

$$x\,y' = 2y + x^3 \cos x, \quad y(2\pi) = 0.$$

Forma lineal: $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x$ (dominio $x \neq 0$). **[1 pts]**

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = x^{-2}$. **[2 pts]**

$$(x^{-2}y)' = \cos x \ \Rightarrow\ x^{-2}y = \sin x + C. \quad \textbf{[2pts]}$$

Condición inicial: $0 = (2\pi)^2(\sin 2\pi + C) \Rightarrow C = 0.$ **[1.5 pt]**

$$y(x) = x^2 \sin x. \quad \textbf{[1pt]}$$

Solución problema 3

Tasas per cápita: $\beta = 1 - P,\ \delta = 2P$.

Modelo: $\dot{P} = (\beta - \delta)P = (1 - 3P)P$. **[2 pts]**

Equilibrios: $P = 0,\ P = \frac{1}{3}$.

Dinámica (para $P(0) > 0$):

- Si $0 < P < 1/3$: $\dot{P} > 0 \Rightarrow$ crece hacia $1/3$. **[2 pts]**
- Si $P > 1/3$: $\dot{P} < 0 \Rightarrow$ decrece hacia $1/3$. **[2 pts]**

Respuestas:

- ¿Crece indefinidamente? No, todas las curvas soluciones están acotadas superiormente. Todas las soluciones, salvo por la solución de equilibrio $P = 0$, convergen a $\frac{1}{3}$ cuando $t \to \infty$. **[3 pts]**
- ¿Se extingue? No si $P(0) > 0$; solo $P \equiv 0$ se mantiene en 0. **[3 pts]**
- ¿Se estabiliza? Sí,

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \tfrac{1}{3} \quad \text{para toda condición inicial positiva.} \quad [\textbf{3pts}]$$

Solución problema 4

Parte (a)

$$x\,y' = e^{-y/x} + y.$$

Sustitución: $y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$. **[2 pts]**

$$x(z + xz') = e^{-z} + xz \;\Rightarrow\; x^2 z' = e^{-z}. \quad \textbf{[2pts]}$$

Ecuación separable: $e^z dz = x^{-2} dx$.

$$e^z = -\tfrac{1}{x} + C \;\Rightarrow\; z = \ln\Big(C - \tfrac{1}{x}\Big). \quad \textbf{[3pts]}$$

Como $z = y/x$,

$$y = x \ln\Big(C - \tfrac{1}{x}\Big). \quad \textbf{[0.5pts]}$$

Parte (b)

$$x^2 y' + 2xy = 5y^3 \iff y' + \tfrac{2}{x} y = \tfrac{5}{x^2} y^3. \quad \textbf{[1pt]}$$

Ecuación de Bernoulli (n=3). Sea $u = y^{-2} \;\Rightarrow\; u' = -2y^{-3} y'$. **[2 pts]**

Multiplicando por $-2y^{-3}$:

$$u' - \tfrac{4}{x} u = -\tfrac{10}{x^2}. \quad \textbf{[1pt]}$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int -4/x\,dx} = x^{-4}$. **[1 pt]**

$$(x^{-4} u)' = -10x^{-6} \;\Rightarrow\; x^{-4} u = 2x^{-5} + C.$$

$$u = 2x^{-1} + Cx^4 \quad \textbf{[1pt]} \;\Rightarrow\; y^{-2} = \tfrac{2}{x} + Cx^4. \quad \textbf{[1pt]}$$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} + Cx^4}}. \quad \textbf{[0.5pts]}$$