Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 3

1. Use el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = \sec(x).$$

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea está dada por $r^2+1 = 0$, que tiene pos solución $r = \pm i$. De este modo, la solución homogénea es de la forma:

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Usando el método de variación de parámetros, tendremos que la solución particular está dada por:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos(x) \int \sin(x)\sec(x)\,dx + \sin(x) \int \cos(x)\sec(x)\,dx \\ &= \cos(x)\ln(\cos(x)) + x\sin(x) \end{aligned}$$

ya que el $W(\cos(x), \sin(x)) = 1$. Por lo anterior, la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \cos(x)\ln(\cos(x)) + x\sin(x)$$

Evaluación. Los puntajes se asignarás siempre y cuando los resultados sean consecuencia de un desarrollo claro y correcto.

- Asignar (**1 pto**) por determinar a $x_1(t) = \cos(t)$ como una de las soluciones homogéneas.
- Asignar (**1 pto**) por determinar a $x_2(t) = \sin(t)$ como una de las soluciones homogéneas.
- Asignar (**1 pto**) por calcular el wronskiano asociado a las soluciones homogéneas.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral $\int \sin(x)\sec(x)\,dx$
- Asignar (**1 pto**) por obtener una fórmula para la solución particular, en que se hayan calculado todas las integrales correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la solución general de la ecuación diferencial.

2. Use el método de coeficientes indeterminados para resolver el problema con valor inicial

$$x''(t) + 4x(t) = 2\cos(2t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Solución. La ecuación característica asociada a la parte homogénea de esta ecuación es $r^2+4 = 0$ que tiene por solución $r = \pm 2i$. De este modo, las solución homogénea está dada por:

$$x_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$$

Dado que $f(t) = 2\cos(2t)$ es parte de la solución homogénea, una propuesta de solución particular es $x_p(t) = a\,t\cos(2t) + b\,t\sin(2t)$. Reemplazando esta propuesta en nuestra ecuación tendremos que

$$4b\cos(2t) - 4a\sin(2t) = 2\cos(2t)$$

igualdad de la que se desprende que $a = 0$ y $b = 1/2$. Por lo tanto, la solución general es:

$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t)$$

Dadas las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$, entonces $c_1 = c_2 = 0$ y el PVI tiene solución

$$x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t)$$

Evaluación. Los puntajes se asignarás siempre y cuando los resultados sean consecuencia de un desarrollo claro y correcto.

- Asignar (**1 pto**) por determinar a $x_1(t) = \cos(2t)$ como una de las soluciones homogéneas.
- Asignar (**1 pto**) por determinar a $x_2(t) = \sin(2t)$ como una de las soluciones homogéneas.
- Asignar (**1 pto**) por identificar la fórma de la solución particular.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la solución particular.
- Asignar (**2 pto**) por determinar la solución al PVI. Si el estudiante tiene correcta la solución general pero equivoca en determinar el valor de una y solo una de las constantes (c_1 ó c_2) para resolver el PVI, asignar (**1 pto**).

3. Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Calcule la solución general y resuelva el problema con valor inicial $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

Solución.

Determinemos la ecuación característica de la matriz asociada al sistema:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-r)(3-r)+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-2)^2 = 0$$

Por lo tanto, $r = 2$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 2. El problema de vectores propios asociado es:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \vec{0}$$

que tiene como solución $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Dado que la multiplicidad geométrica es menor que la algebráica, la solución general al sistema es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{2t} + (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)\, e^{2t}$$

donde

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El conjunto solución de esta ecuación es $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, eligiendo por conveniencia $c = 0$. Por lo anterior, la solución del sistema será

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

Finalmente, una solución al PVI es:

$$\mathbf{x}(t) = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

Evaluación. Los puntajes se asignarás siempre y cuando los resultados sean consecuencia de un desarrollo claro y correcto.

- Asignar (**1 pto**) por determinar el valor propio $r = 2$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un vector propio asociado a $r = 2$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un vector propio generalizado asociado a $r = 2$.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la solución $\mathbf{v}_1 e^{2t}$, para el vector $\mathbf{v}_1$ encontrado.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la solución $(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{2t}$, para los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ encontrados.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar la solución del sistema.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar la solución del PVI.

4. Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Solución. Determinemos la ecuación característica de la matriz asociada al sistema:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 2-r & 6 \\ 1 & 1-r \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-r)(1-r) - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r+1)(r-4) = 0$$

Ahora determinamos los vectores propios asociados:

$$(A+I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De lo anterior, la solución homogénea está dada por

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

Dado que $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$ no es parte de la solución homogénea, una propuesta de solución particular es

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}\, t$$

Remplazando esta propuesta es en el sistema tendremos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{a} + \mathbf{b}\, t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Este último sistema tiene por solución $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 11/16 \\ -7/16 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$. Por lo anterior, la solución general del sistema está dada por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 11/16 \\ -7/16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} t$$

Evaluación. Los puntajes se asignarás siempre y cuando los resultados sean consecuencia de un desarrollo claro y correcto.

- Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor propio $r = -1$.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor propio $r = 4$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un vector propio asociado a $r = -1$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un vector propio asociado a $r = 4$.
- Asignar (**1 pto**) por obtener **a**.
- Asignar (**1 pto**) por obtener **b**.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la solución del sistema. Este puntaje se asignará si no hay error alguno en el desarrollo del ejercicio.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos